Серия 1(с): арифметика и ещё одна вещь.

1. 10 белых и 20 черных фишек расставлены по окружности. Разрешается поменять местами любые две фишки, между которыми стоят еще три фишки. Две расстановки фишек (в данных 30 точках) назовем эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько существует неэквивалентных расстановок?

2. Рассмотрим последовательности, состоящие из 3000 цифр 1 и 2. В такой последовательности разрешается менять местами любые две соседние тройки цифр. Две последовательности называются эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько всего существует неэквивалентных последовательностей?

3. Натуральные числа a и b таковы, что $ab-1$ делится на $b+1$. Докажите, что $a \geqslant b$.

4. Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, $\ldots$, $n!+n$ есть простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

5. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что если при бесконечно многих натуральных k число $k^2+2kn+m^2$ является точным квадратом, то $m=n$.

6. Дано простое число p и целое a, не кратное p. Назовём два ненулевых вычета x и y mod$p$ *эквивалентными*, если $x \equiv a^k y \bmod p$ для некоторого натурального k.

а) Докажите, что все ненулевые вычеты mod$p$ разбиваются на классы так, что все вычеты в одном классе эквивалентны друг другу, а вычеты из разных классов – нет.

б) Докажите, что во всех классах поровну элементов.

в) Выведите из последнего утверждения малую теорему Ферма.

7. В языке племени “мумбо-юмбо” имеется четыре звука: А, У, Ы и Е. Звук Е – особый. Сказанный сам по себе, он означает некоторое слово, но если его присоединить к какому-нибудь слову (в начале, середине или в конце), то значение этого слова не изменится. Кроме того, если представитель племени произносит семь раз подряд звуки А, У или Ы, это значит то же самое, что он произнес один раз звук Е. Наконец многие туземцы вместо УУУЫ предпочитают говорить ЫУ, вместо ААЫ – ЫА и вместо УУУУА – АУ, так что эти слова не различаются.

В племени 400 туземцев. Могут ли у всех них быть разные имена?

8. Пусть a, b, c и d – такие числа, что $ab=1$ и $ac+bd=2$. Докажите, что $cd \leqslant 1$.