Вступительные задачи, 8–9 классы

1. Дан клетчатый прямоугольник $6 \times N$ ($N \geqslant 3$), в котором изначально все клетки покрашены синим. За один ход можно покрасить в красный цвет все единичные квадратики некоторого клетчатого квадрата 2×2, в котором есть хотя бы три синие клетки (в процессе некоторые клетки могут быть покрашены в красный цвет больше одного раза). Какое максимальное количество ходов можно сделать?

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Прямые A_1C_1 и AC пересекаются в точке D. Докажите, что прямая DH перпендикулярна медиане, проведенной из вершины B.

3. Пусть $n \geqslant 3$ – натуральное число, а x_1, x_2, …, x_n – положительные числа, удовлетворяющие равенствам

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = \ldots = x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + x_n^2 = x_n^2 - x_nx_1 + x_1^2.$$

При каких n можно утверждать, что числа x_1, x_2, …, x_n равны?

4. Натуральное число называется *хорошим*, если из него можно получить полный квадрат, приписав к его десятичной записи слева некоторое число, оканчивающееся ровно на 2009 нулей. Для каких n существует n-значное хорошее число, которое не является полным квадратом?

5. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.

6. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N. Докажите, что медианы треугольников ABM, ADN и CMN, проведенные соответственно из вершин B, D и C, пересекаются в одной точке.

7. На плоскости лежит игла. Разрешается поворачивать иглу на 45° вокруг любого из ее концов. Можно ли, сделав несколько таких поворотов, добиться того, чтобы игла вернулась на исходное место, но при этом ее концы поменялись местами?

8. Найдите все такие простые числа p вида $a^2 + b^2 + c^2$ (где a, b, c – натуральные), что $a^4 + b^4 + c^4$ делится на p.

9. Для любых чисел x_1, …, x_n докажите неравенство

$$\max\{x_1, \ldots, x_n, -x_1 - \ldots - x_n\} \geqslant \frac{|x_1| + \ldots + |x_n|}{2n-1}.$$

10. Ладья побывала во всех клетках шахматной доски размерами $n \times n$ клеток. Докажите, что она должна была при этом изменить направление движения не менее $2n - 2$ раз. (Ладья движется параллельно сторонам квадрата.)