Серия 8(с); напоследок

1. а) В продуктовом магазине гири кладутся на одну чашку весов, а продукты – на другую. приходится отвешивать на весах целое число килограммов – от 1 кг до 15 кг. Какое наименьшее число гирь требуется, чтобы можно было отвесить любое целое число килограммов от 1 кг до 15 кг?

б) А какое наименьшее число гирь должно быть в промтоварном магазине, где взвешивать нужно товары до 40 кг, но гири можно класть на обе чашки?

2. На доске записаны дроби $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$.

а) Можно ли перед каждой из этих дробей поставить знак "+" или "-" так, чтобы их сумма равнялась нулю?

б) Если нет, то какое наименьшее количество этих дробей надо стереть, чтобы, поставив перед оставшимися дробями знаки "+" или "-", можно было получить в сумме нуль?

3. a, b, p – любые целые числа. Доказать, что найдутся взаимно простые k, l такие, что $ak + bl$ делится на p.

4. О натуральных числах a и b известно, что $an + 1$ делится на $bn + 1$ при любом натуральном n. Докажите, что $a = b$.

5. Даны два натуральных числа $a < b$. Докажите, что из любых b последовательных натуральных чисел можно выбрать два числа, произведение которых делится на ab.

6. На столе лежит чётное число карточек, на каждой из которых написано натуральное число. Пусть a_k – количество карточек, на которых написано число k. Оказалось, что $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots \geqslant 0$ для каждого натурального n. Докажите, что карточки можно разложить по парам, в каждой из которых числа отличаются на 1.