

**Серия 8(а), напоследок**

1. Докажите неравенство  $0,785n^2 - n < \sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} < 0,79n^2$ .

**Примечание.** При решении этой задачи разрешается пользоваться любыми сведениями из школьной программы.

2. Дано 70 различных натуральных чисел, не превосходящих 200. Докажите, что какие-то два из них различаются на четыре, пять или девять.

3. Положительные числа  $a, b, x, y$  таковы, что  $x^2 - x + 1 = a^2$ ,  $y^2 + y + 1 = b^2$  и  $(2x - 1)(2y + 1) = 2ab + 3$ . Докажите, что  $x + y = ab$ .

4. Найдите все натуральные  $k$  и  $m$  такие, что  $(1 + 2 + \dots + n)^k = 1^m + 2^m + \dots + n^m$  при всех натуральных  $n$ .

5. В последовательности  $a_1, a_2, \dots$  целых чисел есть бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов. Для каждого  $n$  числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  дают попарно различные остатки при делении на  $n$ . Сколько раз в последовательности встречается число 2020?