Серия 7(c). Математические соревнования: арифметика и алгебра.

1. Последовательность $\{a_n\}$, задана условиями $a_1 = 4$; $a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1}$ при $n > 1$. а) Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, каждое из которых является делителем хотя бы одного члена этой последовательности.

б) Существует ли бесконечно много простых чисел, не делящих ни один член этой последовательности?

2. Натуральные числа $a > b$ таковы, что $a^3 + b^3 + ab$ делится на $ab(a-b)$. Докажите, что число ab является кубом натурального числа.

3. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ac + bd$ делится на $a^2 + b^2$. Докажите, что $(a^2 + b^2, c^2 + d^2) \neq 1$.

4. Докажите, что всякое натуральное число, не меньшее 1000, можно представить как сумму трех составных слагаемых так, чтобы сумма любой пары слагаемых тоже была составным числом.

5. Даны неотрицательные вещественные числа A, B, C и D. Докажите неравенство

$$\max(A^2 - B, B^2 - C, C^2 - D, D^2 - A) \geqslant \max(A^2 - A, B^2 - B, C^2 - C, D^2 - D).$$

6. a, b, c, d – положительные вещественные числа. Докажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}$.

7. а) Натуральные числа u и v таковы, что для любого натурального k числа $ku + 1$ и $kv + 1$ имеют общий натуральный делитель, больший 1. Докажите, что $u = v$.

б) Натуральные числа u и v таковы, что для любого натурального k числа $ku + 2$ и $kv + 3$ имеют общий натуральный делитель, больший 1. Чему может быть равно отношение $\frac{u}{v}$?

8. Даны натуральные числа a, b и c, ни одно из которых не является делителем другого. Известно, что $(a, b) + [a, b] = (a, c) + [a, c] + 1$. Докажите, что $c < b \leqslant \frac{3}{2}c$.