Серия 6(с): последовательности.

1. Существует ли 2020-значное число, куб которого оканчивается на 2020 семёрок?

2. Натуральное число A делится на 1, 2, 3, …, 9. Докажите, что если $2A$ представлено в виде суммы нескольких слагаемых, каждое из которых равно 1, 2, 3, …, 9, то среди них найдутся несколько слагаемых, сумма которых равна A.

3. При каких значениях n выражение 2^n+1 является нетривиальной степенью натурального числа?

4. Докажите, что для любых k бесконечных последовательностей натуральных чисел:

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots;$$

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots$$

найдутся такие номера p и q, что для любого $1 \leqslant i \leqslant k$ имеем $x_p^{(i)} \geqslant x_q^{(i)}$.

5. На плоскости задана система координат. Пусть N – число точек с целыми координатами (x, y), удовлетворяющих условию $x^2+y^2<n^2$, где n – целое число. Докажите, что $N \geqslant 3(n-1)^2$.

6. Дана последовательность из k чисел. Разрешается любое число заменить на сумму чисел, стоящих справа от него. Докажите, что если эту операцию проделать достаточно много раз, то какая-нибудь последовательность повторится два раза подряд.

7. В последовательности натуральных чисел a_1, a_2, … для любых i и j выполнены соотношения $\min(a_i, a_j) = a_{(i,j)}$, $\max(a_i, a_j) = a_{[i,j]}$. Какое наибольшее количество разных чисел может встречаться среди ее первых 2010 членов?

5. В последовательности целых чисел $\{a_n\}$ первый член равен k, а при $n \geqslant 1$ член a_{n+1} равен $a_n - 1$, если a_n четно, и $(a_n-1)/2$, если a_n нечетно. При каком наименьшем положительном k среди первых 2010 членов этой последовательности нет ни одного нуля?