

### Серия 5(с): разговоры и арифметика.

1. На плоскости отмечены вершины правильного 2003-угольника. Докажите, что количество 20-угольников с вершинами в отмеченных точках, содержащих центр исходного 2003-угольника, делится на 13.

2. В ряд выписаны натуральные числа от 1 до 100 в некотором порядке. Какое наименьшее значение может принимать максимальная сумма десяти чисел, стоящих подряд?

3. Дана бесконечная десятичная дробь, причем после запятой у нее встречаются только цифры 0, 1, 2. Известно, что если все цифры 0 заменить на 1, то получится периодическая десятичная дробь (возможно с пред-периодом), и если все цифры 1 заменить на 2, то тоже получится периодическая десятичная дробь. Следует ли отсюда, что исходная дробь периодическая?

4. Последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  задается правилами:  $a_{2n} = a_n$  при  $n \geq 1$  и  $a_{4n+1} = 1, a_{4n+3} = 0$  при  $n \geq 0$ . Докажите, что эта последовательность не имеет периода.

5. Натуральные числа  $S, p$  и  $q$  таковы, что  $S \equiv 0 \pmod{q}, S \equiv 1 \pmod{p}, q > p$  и  $S \leq pq$ . Докажите, что  $S \leq pq - \frac{q(p-1)}{q-p}$ .

6. Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит квадрат натурального числа и куб натурального числа. Докажите, что она содержит шестую степень натурального числа.

7. Конечное множество  $S$  натуральных чисел, больших 1, обладает следующим свойством: для любого натурального  $n$  в множестве  $S$  найдется либо число, взаимно простое с  $n$ , либо делитель числа  $n$ . Докажите, что в множестве  $S$  либо найдется простое число, либо найдутся два числа, имеющих простой наибольший общий делитель

8. Дано натуральное число  $a$ . Для каждого натурального  $n$  положим  $x_n = a^n + a^{n-1} - 1$ . Докажите, что из последовательности  $\{x_n\}$  можно выбрать бесконечную подпоследовательность, все члены которой попарно взаимно просты.