Серия 4(с): вечное возвращение.

1. Докажите *формулу Бине* для числа Фибоначчи F_n: $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

2. В последовательности цифр первые четыре члена – 1, 9, 8, 2, а каждая следующая цифра – последняя цифра суммы четырех предыдущих. Встретится ли в этой последовательности четверка подряд идущих цифр 3, 0, 4, 4?

3. В стране Мара расположено несколько замков. Из каждого замка ведут три дороги. Из какого-то замка выехал рыцарь. Странствуя по дорогам, он из каждого замка, лежащего на его пути, поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал. Рыцарь никогда не сворачивает в ту сторону, в которую он свернул перед этим. Докажите, что он когда-нибудь вернется в свой замок.

4. A – нечетное число, X и Y – корни уравнения $t^2 + At - 1 = 0$. Докажите, что при любом натуральном k $X^k + Y^k$ и $X^{k+1} + Y^{k+1}$ – целые взаимно простые числа.

5. Найдите все пары простых чисел p и q таких, что $p^2(p^3 - 1) = q(q + 1)$.

6. Положительные числа x, y, z таковы, что $2xyz + xy + xz + yz = 1$. Докажите, что существуют такие положительные a, b, c, что $x = \frac{a}{b+c}$, $y = \frac{b}{a+c}$, $z = \frac{c}{a+b}$.

7. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существуют натуральные числа x и y такие, что $C^2_{x+y} = ax + by$.

8. Дроби $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\ldots$, $\frac{1}{p-2}$, $\frac{1}{p-1}$ привели к общему знаменателю и сложили. Докажите, что если число p простое и $p > 2$, то числитель получившейся дроби делится на p.