

Серия 3(с), формалистическая

1. Каждое целое число покрашено в красный или синий цвет. Известно, что в любом наборе из нескольких последовательных целых чисел количества красных и синих чисел отличаются не более, чем на 1000. Докажите, что существуют 2000 последовательных целых чисел, среди которых ровно 1000 красных и 1000 синих.

2. При каких натуральных n числа от 1 до n можно записать в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел m и k между ними не было числа $(m+k)/2$?

3. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, для которых $a^3b - 1$ делится на $a + 1$ и $ab^3 + 1$ делится на $b - 1$.

4. Докажите, что число $\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{n}\right] + [\sqrt{n}]$ чётно при любом натуральном n .

5. Множество M натуральных чисел, больших единицы, обладает следующими свойствами:

(1) если n содержится в M , то в M содержатся и все делители n , большие 1;

(2) если различные a и b содержатся в M , то в M содержится и $ab + 1$.

Докажите, что если в M больше одного элемента, то в нём содержатся все натуральные числа, большие единицы.

6. Даны различные простые числа p_1, p_2, \dots, p_n ($n > 1$). Рассмотрим множество U всех натуральных чисел, среди простых делителей которых встречаются только p_1, p_2, \dots, p_n . При каком наименьшем k верно следующее утверждение: из любых чисел $a_1, \dots, a_k \in U$, не делящихся на квадрат никакого натурального числа, большего 1, можно получить все элементы U только с помощью операций умножения и деления? (Числа a_i можно использовать не по одному разу.)

7. Для каждого натурального n положим $a_n = n + m$, где m – наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $2^{2^m} \leq n2^n$. Какие натуральные числа не являются членами последовательности (a_n) ?

8. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n$ при $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$; $b_{n+3} = b_{n+2} + 2b_{n+1} + b_n$ при $n \geq 0$, $b_0 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Сколько существует чисел, встречающихся в обеих последовательностях?