Серия 2(с), бесконечно-бюрократическая

1. Множество из 2^n элементов разбито на попарно непересекающиеся подмножества. Рассматривается операция, состоящая в переводе некоторых элементов из одного подмножества в другое, причем число переводимых элементов должно совпадать с числом элементов во втором множестве (которое должно содержать элементов не больше, чем первое). Докажите, что с помощью конечного числа таких операций можно получить подмножество, совпадающее с исходным множеством.

2. Существует ли арифметическая прогрессия из 2018 различных натуральных чисел, произведение которых равно точной 2019-й степени натурального числа?

3. Последовательность целых чисел (a_n) удовлетворяет условию $a_{n+2} = ka_{n+1} + la_n$, $n \geqslant 0$, где k, l – целые числа. Известно, что в этой последовательности бесконечное количество чисел, делящихся на d. Докажите, что, начиная с некоторого n, эти числа встречаются в последовательности через равные промежутки.

4. Найдите все натуральные n, большие 1 и такие, что если $ab + 1$ делится на n для каких-то натуральных чисел a и b, то и $a + b$ тоже делится на n.

5. Рассматриваются всевозможные разрезания квадрата 10×10 на прямоугольники с целыми сторонами, одна из которых равна 1. Два разрезания называются независимыми, если при наложении квадратов никакие прямоугольники не совпадут. Найдите наибольшее количество попарно независимых разрезаний.

6. Для каждого натурального k обозначим $r(k)$ произведение всех различных простых делителей k (а $r(1)$ положим равным 1). Докажите, что в последовательности, заданной произвольным натуральным первым членом и условием $a_{n+1} = a_n + r(a_n)$, встретится сколь угодно много последовательных членов, образующих арифметическую прогрессию.

7. Докажите, что если $\frac{a}{b}$ – правильная дробь, то она может быть представлена в виде $\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} + \ldots + \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n}$, где q_1, q_2, $\ldots$, q_n – целые и положительные числа, причем $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n$.

8. Множество A, состоящее из вещественных чисел, обладает следующим свойством: вместе с каждым числом x оно содержит число $2x^2 - 1$. Может ли A состоять ровно из ста чисел?