Серия 1(с), арифметическая

1. Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, $\ldots$ и b_1, b_2, $\ldots$, состоящие из натуральных чисел. Известно, что $a_1 = b_1$ и для каждого номера n числа a_n и b_n имеют равные остатки при делении на n. Докажите, что прогрессии совпадают.

2. Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия а) из 11; б) из 1000; в) из бесконечного числа натуральных чисел такая, что суммы цифр ее членов (в десятичной записи) также составляют возрастающую арифметическую прогрессию?

3. Обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2$, $S_2 = 2 + 3 = 5$, $S_3 = 2 + 3 + 5 = 10$, $S_4 = 17$ и т.д. Докажите, что при любом n между S_n и S_{n+1} встречается точный квадрат.

4. Докажите, что любое положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и 7.

5. При каком наименьшем натуральном n не существует арифметической прогрессии из 1999 членов, ровно n из которых – целые?

6. Натуральные числа x и y таковы, что $x^2 + y^2 - x$ делится на xy. Докажите, что x – точный квадрат.

7. Пусть n – натуральное число, и S – множество всех натуральных чисел a таких, что $1 < a < n$ и число $a^{a-1} - 1$ делится на n. Докажите, что если $S = \{n - 1\}$, то n – удвоенное простое число.

8. Докажите, что данное натуральное число A является точным квадратом тогда и только тогда, когда для каждого натурального n хотя бы одна из разностей

$$(A + 1)^2 - A, (A + 2)^2 - A, (A + 3)^2 - A, \ldots, (A + n)^2 - A$$

делится на n.