

Серия 1(с). Stii sa vorbesti romaneste?

1. Последовательность (a_n) задана условиями: $a_1 = a$, $a_2 = b$, и при каждом $n > 2$ число a_{n+1} равно количеству членов, равных a_n , среди первых n членов последовательности. При каких a и b последовательность $(a_n + a_{n+1})$ не убывает, начиная с некоторого места?
2. Маша задумала поле шахматной доски, а Вася может задать ей N вопросов, на которые Маша честно ответит "да" или "нет". Все вопросы надо задать сразу. При каком наименьшем N Вася заведомо сумеет отгадать поле?
3. На плоскости проведено n прямых общего положения (т. е. никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). Они разбили плоскость на конечные и бесконечные части. Каждую конечную часть покрасили в красный или зеленый цвет. За ход можно перекрасить все части внутри треугольника, образованного некоторыми тремя прямыми. Докажите, что такими операциями все части можно сделать красными.
4. В клубе n членов. Они образовали k комитетов. В каждом комитете не менее ℓ членов, и у каждого двух комитетов не более одного общего члена. Докажите, что $k \leq \frac{n(n-1)}{\ell(\ell-1)}$.
5. Каждый ученик класса занимается в двух кружках, и для каждого трех учеников есть кружок, в который они ходят вместе. Докажите, что имеется кружок, в котором занимаются все ученики.
6. Докажите, что $\left[\frac{[a]}{n} \right] = \left[\frac{a}{n} \right]$ для любого вещественного a и натурального n .
7. На танцевальном вечере в школе ни один мальчик не танцевал со всеми девочками, но каждая девочка танцевала по крайней мере с одним мальчиком. Докажите, что найдутся две такие пары M_1, D_1 и M_2, D_2 , что мальчик M_1 танцевал с девочкой D_1 , а мальчик M_2 – с девочкой D_2 , но M_1 не танцевал с D_2 , а M_2 не танцевал с D_1 .
8. Клетки бесконечной в одну сторону клетчатой полоски занумерованы по порядку слева направо, начиная с 1. В начале в первой и второй клетках лежит по монете. Если монета лежит в k -й клетке, ее можно сдвинуть на k пустых клеток вправо. Докажите, что для каждого натурального N можно поставить монету в N -ю клетку.