Вступительные задачи, 8 класс

1. Докажите, что если $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, то $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$.

2. Найдите сумму
$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1.$$

3. Решите уравнение
$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{x+1}=p,$$
где p – произвольное вещественное число.

4. В некотором множестве введена операция $*$, которая каждым двум элементам a и b этого множества ставит в соответствие элемент $a*b$ из этого множества. Известно, что

1) $a*(b*c)=b*(c*a)$ для любых трех элементов a, b и c;

2) если $a*b=a*c$, то $b=c$;

3) если $a*c=b*c$, то $a=b$.

Докажите, что операция $*$

а) коммутативна, то есть для любых двух элементов a и b
$$a*b=b*a,$$

б) ассоциативна, то есть для любых трех элементов a, b и c
$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

5. В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нем уже содержится, из любого другого сосуда. Докажите, что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды достаточно велики: каждый может вместить всю воду.)

6. Треугольная таблица строится по следующему правилу: в верхней строке написано натуральное число $a>1$, а далее под каждым числом k слева пишется k^2, а справа – число $k+1$. Докажите, что в каждой строчке таблицы все числа различны.

7. Пусть $k<n$ – натуральные числа. Расставьте числа $1,2,3,\ldots,n^2$ в таблицу $n\times n$ так, чтобы в каждой строке числа шли в порядке возрастания и при этом сумма чисел в k-м столбце была а) наименьшей; б) наибольшей.

8. Докажите тождество
$$\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

9. Три отрезка AB, EF и CD проходят через одну точку O, причем точка E лежит на отрезке AC, а точка F – на отрезке BD. Докажите, что EF меньше хотя бы одного из двух отрезков – AB или CD.

10. Рассмотрим последовательность слов, первое из которых состоит из одной буквы А, второе – АБ, третье – АБА, четвертое – АБААБ, пятое – АБААБАБА, и так далее: очередное слово получаем из предыдущего, заменяя каждую букву А на АБ, а Б – на А.

а) Докажите, что каждое слово этой последовательности, начиная с третьего, получается приписыванием предпредыдущего слова к предыдущему. (Например, АБААБАБА – это АБААБ плюс АБА.)

б) Пусть $a_1=1$, $b_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$, $b_2=5$, $a_4=6$, $b_3=7$, $a_5=8$, $a_6=9$, $b_4=10$ и, вообще, пусть a_n и b_n – номера мест, на которых стоят n-е буквы А и Б в бесконечном слове АБААБАБААБАБААБАБА…, начальными отрезками которого являются слова пункта а). Докажите равенство $b_n=n+a_n$.

в) Рассмотрим другую последовательность слов: А, АБ, АБАА, АБАААБАБ, АБАААБАБАБАААБАА, … (Очередное слово получается из предыдущего заменой А на АБ, а Б – на АА.) Докажите, что каждое слово этой последовательности является началом следующего ее слова и что номер места, на котором в соответствующем бесконечном слове

АБАААБАБАБАААБАААБАААБАБАБАААБАБ…

стоит n-я буква Б, в два раза больше номера места, на котором стоит n-я буква А.