**Серия 9(d), напоследок.**

1. В клубе $n$ членов. Они образовали $k$ комитетов. В каждом комитете не менее $\ell$ членов, и у каждых двух комитетов не более одного общего члена. Докажите, что $k \leqslant \frac{n(n-1)}{\ell(\ell-1)}$.

2. Клетчатая "лесенка" состоит из $n$ столбиков, нижние клетки которых составляют строчку из $n$ клеток, а количества клеток в столбиках (слева направо) $1, 2, \ldots, n$. При каких $n$ такую лесенку можно разбить на $n$ квадратов с натуральными сторонами?

3. Для чисел $0 < x < 2$ и $0 < y < 2$ докажите неравенство $\frac{x-y}{x+y-xy} < 1$.

4. Найдите все натуральные $n$, для которых $\{\sqrt{n}\} = \{\sqrt{n+100}\}$. Здесь $\{x\}$ – дробная часть числа $x$.

5. Даны различные простые числа $p$ и $q$. Натуральные числа $m$ и $n$ таковы, что число $\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p}$ – целое. Докажите неравенство $\frac{m}{q} + \frac{n}{p} > 1$.

6. $a, b > 0$, $a^2 + b^2 = 6ab$. Найдите $\frac{a+b}{a-b}$.

7. Положительные числа $a$, $b$, $c$, $d$ таковы, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ и $a+b+c+d \leqslant 1$. Докажите, что $a^2+3b^2+5c^2+7d^2 \leqslant 1$.