**Серия 8(d): всё сразу.**

1. Пусть $p_n$ – $n$-е простое число, а $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих $n$. Докажите, что каждое натуральное число представляется ровно в одном из видов $n + p_n - 1$ или $n + \pi(n)$.

2. Пусть $(a, b) = d$, $(a', b') = d'$. Докажите, что $(aa', ab', ba', bb') = dd'$.

3. Натуральные числа $y$ и $z$ удовлетворяют соотношению $y^3 + 4y = z^2$. Докажите, что $y$ есть удвоенный квадрат.

4. Из шахматной доски вырезан прямоугольник со сторонами, параллельными ее краям (стороны не обязательно идут по границам клеток). Докажите, что разность площадей белой и черной его частей не превосходит площади одной клетки.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол $B$ равен 30 градусам. Докажите, что периметр треугольника $ACD$ не меньше длины $BD$.

6. Можно ли составить замкнутое ожерелье из 100 бусинок – красных, синих и зеленых, так, чтобы между любыми двумя красными бусинками была хотя бы одна синяя, между любыми двумя синими – зеленая, между любыми двумя зелеными – красная?

7. $a$, $b$, $c$, $d$ – вещественные числа, причем $a > b > c > d$. Докажите, что $c < \frac{cd-ab}{c-a+d-b} < b$.

8. Докажите, что $3^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$ при всех натуральных $n$.