

Серия 7(d). Repetitio est mater studiorum.

1. С каждым из чисел от 000000 до 999999 поступим следующим образом: умножим первую цифру на 1, вторую на 2 и так далее, последнюю – на 6. Сумму полученных шести чисел назовем *характеристикой* исходного числа. Сколько чисел имеют характеристику, делящуюся на 7?

2. Таблица размером $n \times n$ заполнена натуральными числами так, что всякие два числа, соседние по горизонтали или по вертикали, различаются на 1. Докажите, что найдется натуральное число, которое присутствует либо на каждой горизонтали, либо на каждой вертикали.

3. В правильном десятиугольнике проведены все диагонали. Возле каждой вершины и возле каждой точки пересечения диагоналей поставлено число $+1$ (рассматриваются только сами диагонали, а не их продолжения). Разрешается одновременно изменить все знаки у чисел, стоящих на одной стороне или на одной диагонали.

Можно ли с помощью нескольких таких операций изменить все знаки на противоположные?

4. n школьников занимаются в кружках. В каждом кружке состоят ровно 5 человек. Для любых двух школьников существует не более одного кружка, в котором занимаются они оба. Докажите, что количество кружков не более $\frac{n^2}{20}$.

5. Решите в целых числах уравнение $xy - 5x + 7y = 22$.

6. Пусть n – натуральное число, большее 6. Докажите, что найдутся а) две, б) четыре различных правильных несократимых дроби со знаменателем n .

7. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M . Докажите, что $AC + CB < AM + MB$.

8. Число $\frac{2003}{22003}$ записано в виде конечной десятичной дроби. Какая цифра у него стоит на четвертом с конца месте?