Серия 6, с неравенствами

1. Числа a, b, c таковы, что $ab+a+b \geqslant 0$ и $ac+a+c \geqslant 0$. Докажите, что $bc+b+c > -1$.

2. Число $1/97$ представили в виде бесконечной десятичной дроби. Первую ненулевую цифру после запятой вычеркнули. Представьте получившиеся число в виде обыкновенной дроби.

3. Последовательность a_1, a_2, $\ldots$, a_{10000} такова, что для каждого натурального $n \leqslant 10000$ числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n дают попарно различные остатки от деления на n. В этой последовательности встречается и число 2018, и число -2018. Сколько раз в ней встречается число 2017?

4. Найдите все пары различных целых чисел a, b такие, что $(a^2+1)(b-1) = (b^2+1)(a-1)$.

5. Число называется прекрасненьким, если оно делится на произведение всех своих ненулевых цифр. Докажите, что 14 прекрасненьких чисел не могут идти подряд.

6. Произведение всех простых чисел, больших 3 и меньших n, имеет сумму цифр 8. Чему оно может быть равно?

7. Докажите, что если нечетное натуральное число k делится на $[\sqrt{k}]$, то либо k, либо $k+1$ является квадратом целого числа. (Здесь через $[\sqrt{k}]$ обозначается целая часть числа $\sqrt{k}$, т.е. наибольшее натуральное число, не превосходящее $\sqrt{k}$.)

8. Докажите, что для любого вещественного числа $a > 1$ справедливо неравенство $\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} < \frac{1}{a-1}$.