Серия 5(d), с примесью комбинаторики

1. На прямой лежат несколько отрезков единичной длины. Докажите, что на прямой можно отметить несколько точек таким образом, чтобы на каждом отрезке была отмечена ровно одна точка (концы отрезка принадлежат отрезку).

2. В дереве 100 вершин. Сколькими способами можно раскрасить его вершины а) в 2, б) в 3 цвета так, чтобы соседние вершины всегда были разного цвета?

3. а) Натуральные числа m и n таковы, что m^3 делится на $m+n$. Докажите, что n^3 также делится на $m+n$.

б) Натуральные числа m и n таковы, что m^{2018} делится на $m+n$. Докажите, что n^{2018} также делится на $m+n$.

4. Решите а) в натуральных, б) в целых числах уравнение $a(a+1) = b(b+2)$.

5. Решите в натуральных числах уравнение $11x^2 + 14y^2 = 5z^2$.

6. В ряд лежат 20 монет: орел, решка, орел, решка и т. д. Разрешается взять несколько монет подряд и перевернуть. За какое наименьшее количество операций можно перевернуть все монеты орлами вверх?

7. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.д.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

8. Даша разместила в Инстаграме пять фотографий. Каждая фотография понравилась более чем половине её друзей (а друзей у Даши больше одного). Докажите, что найдутся два друга таких, что каждая фотография понравилась хотя бы одному из них.