

**Серия 4(d), техническая**

- а) Докажите, что при натуральных  $a$  и  $n$   $a^n - 1$  делится на  $a - 1$ .
- б) Докажите, что при натуральных  $a$  и  $b$  и нечетном  $n$  число  $a^n + b^n$  делится на  $a + b$ .
- $a$  и  $n$  – натуральные числа. Докажите, что  $a^{2n+1} + (a - 1)^{n+2}$  делится на  $a^2 - a + 1$ .
- Сколько существует последовательностей длины  $n$ , составленных из нулей и единиц, в которых не встречается двух нулей подряд?
- Найдите сто знаков после запятой десятичной записи числа  $\sqrt{0,99\dots 9}$  (100 девяток).
- Найдите наименьшее натуральное  $n$  такое, что все дроби  $\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \dots, \frac{91}{n+93}$  несократимы.
- Наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$  равен 1. Чему может быть равен наибольший общий делитель чисел  $7a + 5b$  и  $2a + 3b$ ?
- Докажите, что любое составное число можно представить в виде  $xy + xz + yz + 1$ , где  $x, y$  и  $z$  – натуральные числа.
- Докажите, что  $2009!! + 2010!!$  делится на 2011. ( $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ )