

### Серия 3(d): развиваем успех.

1. Город Нью-Зулусск, экономический и культурный центр Зулусии, имеет в плане вид прямого угла, разделенного на кварталы улицами, параллельными одной его стороне (которая называется 0-й улицей) или проспектами, параллельными другой стороне (проспекту №0). Сколькими способами можно проехать от монумента “Медный Зулус” (который стоит на площади, в просторечии называемой “Два Нуля”) на угол  $m$ -ой улицы и  $n$ -го проспекта? (Двигаться можно в двух направлениях: вперед и вправо).

2. За круглым столом сидят  $n \geq 3$  девочек, у каждой из которых есть хотя бы одно яблоко. Каждый раз, когда учитель замечает девочку, у которой больше яблок, чем у обеих её соседок, вместе взятых, он забирает у неё два яблока и выдаёт по яблоку каждой из её соседок. Докажите, что через конечное число шагов этот процесс закончится.

3.  $a, b, c, d$  и  $n$  — натуральные числа, причем  $a + b$  и  $c + d$  делятся на  $n$ . Докажите, что  $ac - bd$  делится на  $n$ .

4. Какое наибольшее количество попарно взаимно простых чисел можно выбрать из чисел от 1 до 50?

5. Из первых  $k$  простых чисел  $2, 3, 5, \dots, p_k$  ( $k > 4$ ) составлены всевозможные произведения, в которые каждое из чисел входит не более одного раза (например,  $3 \cdot 5, 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_k, 11 \cdot 13, 7$  и т. д.). Обозначим сумму таких чисел  $S$ . Докажите, что  $S + 1$  разлагается в произведение более  $2k$  простых сомножителей.

6. Обозначим через  $\pi(n)$  количество простых чисел, не превосходящих  $n$ . Докажите, что  $\pi(2n) + 1 \geq \pi(n!) + 2n - \pi(n!)$ .

7. Последовательность  $\{x_n\}$  задана условиями  $x_1 = 1, x_{n+1} = 2x_n + 3$ . Найдите явное выражение для  $x_n$ .

8. Внутри прямого угла с вершиной  $O$  взята точка  $C$ , а на его сторонах — точки  $A$  и  $B$ . Докажите, что  $2|OC| \leq P_{ABC}$ .