Серия 2(d): слабое место.

1. Дано натуральное число a. Найдите наибольшее такое натуральное число n, что количество чисел, кратных a и не больших n, равно количеству чисел, кратных $a+1$ и не больших n.

2. На доске написаны натуральные числа p и q. Разрешается увеличивать оба числа на 1, либо, если одно из чисел является точным квадратом, извлечь из него корень. При каких исходных p и q можно несколькими такими операциями добиться, чтобы числа стали равными?

3. У каждого из двух натуральных чисел m и n нашли произведение всех его натуральных делителей (включая само число). Полученные произведения оказались равными. Докажите, что $m = n$.

4. Даны различные натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_m, b_1, b_2, $\ldots$, b_n. Сколькими способами можно выбрать несколько из этих $m+n$ чисел так, чтобы каждое из b_i имело четное число делителей среди выбранных?

5. Определим число $n?$ ("эн вопросиал") следующим образом: $1? = 1$, $n? = \frac{n}{(n-1)?}$ для всех $n > 1$. Докажите, что $n? \times n!$ – точный квадрат.

6. Существуют ли простое число p и целые неотрицательные числа x, y, z, удовлетворяющие уравнению $(12x+5)(12y+7) = p^z$?

7. На доске написано целое положительное число. Число разрешено увеличивать на треть или на одну пятую его значения. Докажите, что, в каком бы порядке ни проделывались эти операции, число на доске рано или поздно перестанет быть целым.

8. В квадратном лесу со стороной 1 км все деревья имеют диаметр не более 50 см. Любая прямая тропа, проведенная через лес, пересекает дерево. Докажите, что в лесу не менее 2000 деревьев.