

Серия 1(d), с движениями

1. Докажите, что число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$ — не целое.
2. За круглым столом сидят $n \geq 3$ девочек, у каждой из которых есть натуральное число яблок. Каждый раз, когда учитель замечает девочку, у которой больше яблок, чем у обеих её соседок вместе взятых, он забирает у неё одно яблоко и выдаёт по яблоку каждой из её соседок. Докажите, что через конечное число шагов этот процесс закончится. (Предполагается, что у учителя неограниченный запас яблок.)
3. Каждая из 100 девушек послала одному или нескольким из 100 юношей свою фотографию. Всего было послано больше 100 фотографий. Докажите, что какой-то из юношей может выкинуть все полученные им фотографии, но при этом фотография каждой девушки останется у кого-либо из остальных юношей.
4. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать во всех городах, совершив не более 198 перелетов.
5. Деревни Альфино и Бетино расположены по разные стороны от молочной реки с параллельными прямолинейными кисельными берегами. В каком месте нужно построить мост через молочную реку, чтобы путь из Альфино в Бетино был кратчайшим?
6. Деревни Альфино и Бетино находятся
 - а) по разные стороны,
 - б) по одну сторонуот прямолинейной железной дороги. В каком месте дороги нужно построить станцию для того, чтобы сумма расстояний от деревень до станции была наименьшей?
7. Четырёхугольник вписан в квадрат (то есть на каждой стороне квадрата лежит по вершине четырёхугольника). Докажите, что периметр четырёхугольника
 - а) больше удвоенной стороны квадрата;
 - б) не меньше его удвоенной диагонали.
8. Сколькими способами можно выбрать нечетное число элементов из n -элементного множества?