


Вступительные задачи, 7 класс

1. Существует ли арифметическая прогрессия из 2008 различных натуральных чисел, произведение которых равно точной 2009-й степени натурального числа?

2. Вася отметил 10 клеток в клетчатой таблице 10×10 клеток. Всегда ли Петя может вырезать из этой таблицы

по линиям сетки 19 фигурок вида  так, чтобы фигурки не содержали отмеченные клетки? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

3. Дана клетчатая полоса $1 \times N$. Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй – нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

4. Докажите, что число $1^1 + 3^3 + 5^5 + 7^7 + 9^9 + \dots + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ делится на 2^n , но не делится на 2^{n+1} .

5. Натуральные числа a , b и c таковы, что $ab + bc = ca$. Докажите равенства $[a, b] = [b, c] = [c, a]$ (квадратные скобки обозначают наименьшее общее кратное).

6. В таблице $2n \times 2n$ расставлены натуральные числа, не превосходящие 10. Известно, что числа, расположенные в клетках, имеющих общую сторону или вершину, взаимно просты. Докажите, что какое-то число встречается в таблице не менее чем $2n^2/3$ раз.

7. Параллельно каждой из сторон квадрата провели по 18 прямых, в результате стороны квадрата оказались разбиты на отрезки натуральной длины. Рассматриваются все 190^2 прямоугольников со сторонами, лежащими на сторонах квадрата и проведенных прямых. Какое наибольшее количество из этих прямоугольников может иметь нечетную площадь?

8. Степени всех вершин графа не больше трех, и любые две его вершины соединены ровно одним несамопересекающимся путем. Назовем *расстоянием* между вершинами количество ребер в единственном соединяющем их пути. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в 5 цветов так, чтобы любые две вершины, находящиеся на расстоянии 4 друг от друга, были покрашены в разные цвета.

9. Внутри прямоугольника $ABCD$ выбрана такая точка X , что треугольник BCX равносторонний. Точка Y такова, что треугольник CDY равносторонний и внутри него лежит точка X . Докажите, что треугольник AXY также равносторонний.

10. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На прямой AC выбрана такая точка D , что A – середина DC . Перпендикуляр к прямой DC в точке A пересекает отрезок BD в точке E . Докажите, что углы DBA и BCE равны.