Серия 8(а): около алгебры.

1. а) Докажите для каждого простого p, что из любых $2p-1$ чисел можно выбрать p, сумма которых делится на p.

б) Докажите для каждого натурального n, что из любых $2n-1$ чисел можно выбрать n, сумма которых делится на n. *(При решении этого пункта можно пользоваться утверждением п.а))*

2. В множестве E, состоящем из n элементов, выделены m различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для каждых двух элементов E найдется ровно одно из данных подмножеств, в которое входят оба этих элемента. Докажите, что $m \geqslant n$.

3. Пусть $n > 2$ – четное число. Клетки доски $n \times n$ покрашены в $n^2/2$ цветов так, что каждым цветом окрашены ровно две клетки. Докажите, что можно расставить n не бьющих друг друга ладей на полях разного цвета.

4. Докажите, что если m и n – целые числа и $1 \leqslant m < n$, то $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k^m C_n^k = 0$.

5. Во взводе национальной гвардии служат сержанты и рядовые, причем каждый рядовой подчинен одному или двум сержантам. Докажите, что можно уволить в запас не более половины взвода так, что каждым оставшимся рядовым будет командовать ровно один сержант.

6. На множестве M натуральных чисел от 1 до 2017 определена операция $*$, которая каждым двум числам a и b из множества M ставит в соответствие некоторое число $a*b$, также принадлежащее M. Известно, что для любых чисел a и b из M выполнено равенство $(a*b)*a = b$. Докажите, что найдется число a такое, что $a*a = a$.

7. а) Верно ли, что любые два прямоугольника равной площади можно расположить на плоскости так, что любая горизонтальная прямая, пересекающая один из них, будет пересекать и второй, причем по отрезку той же длины?

б) Докажите, что если два прямоугольных параллепипеда имеют равные объемы, то их можно расположить в пространстве так, что любая горизонтальная плоскость, пересекающая один из них, будет пересекать и второй, причем по многоугольнику той же площади.

8. Последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n \ldots$ такова, что каждое натуральное число либо входит в эту последовательность, либо представляется в виде суммы двух её членов, быть может, одинаковых. Докажите, что $a_n \leqslant n^2$ для всех натуральных n.