Серия 7(а), вообще-то вся комбинаторная

1. а) Пусть $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ – многочлен с целыми коэффициентами степени $< n(p-1)$. Докажите, что $\sum\limits_{x_1,\ldots,x_n} \Phi(x_1,\ldots,x_n) \equiv 0 \pmod p$, где в сумме слева $x_1,\ldots,x_n$ независимо друг от друга пробегают полную систему вычетов по модулю p.

б) (теорема Варнинга) Докажите, что если степень многочлена с целыми коэффициентами $F(x_1,\ldots,x_n)$ меньше числа переменных n, то число решений сравнения $F(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0 \pmod p$ делится на p.

2. а) Постройте многочлен F степени, меньшей p, такой, что для данного a $F(a)\equiv 1 \pmod p$ и $F(x)\equiv 0 \pmod p$ при $x\not\equiv a \pmod p$.

б) Для данных a_0, a_1, …, a_{p-1} постройте многочлен F степени, меньшей p, такой, что $f(k)\equiv a_k \pmod p$ при $0\leqslant k\leqslant p-1$.

3. Пусть p – простое число и $f(x)$ – многочлен степени d с целыми коэффициентами такой, что: (i) $f(0)=0$, $f(1)=1$; (ii) для каждого натурального n остаток от деления $f(n)$ на p равен 0 или 1. Докажите, что $d\geqslant p-1$.

4. а) Пусть A и B – два конечных множества чисел (или, скажем, вычетов $\bmod m$), а e – произвольное число. Рассмотрим множества $A(e)=A\cup(B+e)$ и $B(e)=B\cap(A-e)$. Докажите, что $|A(e)|+|B(e)|=|A|+|B|$.

б) (Теорема Коши-Дэвенпорта) Пусть A и B – два непустых множества вычетов по простому модулю p. Докажите, что $|A+B|\geqslant \min(p,|A|+|B|-1)$.

5. Король сказочной страны пригласил на пир людоедов своей страны. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. (Если людоед A хочет съесть людоеда B, то это не значит, что людоед B хочет съесть людоеда A.) Известно, что наибольшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй – третьего и т.д., состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов по шести комнатам, что в каждой комнате никто не хочет никого есть.

6. В “Большой энциклопедии кроликов” 10 томов. Они стоят на полке почти по порядку: каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем. Сколько таких расположений возможно?

7. Поля доски $n\times n$ раскрашены в три цвета – синий, белый, красный, причем известно, что рядом с каждой синей клеткой есть (граничащая по стороне) белая, рядом с белой – красная и рядом с красной – синяя. Докажите для количества k клеток одного – скажем, красного – цвета оценки: а) $k\leqslant 2n^2/3$; б) $k\geqslant n^2/11$.

8. На плоскости выбраны 1000 точек общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой). Рассматриваются всевозможные раскраски этих точек в два цвета. Назовем раскраску *неразделимой*, если не существует такой прямой, что точки разных цветов лежат в разных полуплоскостях. Докажите, что число неразделимых раскрасок не зависит от выбора точек.