Серия 4(а): веса, потенциалы, разное и полезное.

1. (Diamond lemma) Ориентированный граф G (возможно, бесконечный) удовлетворяет условиям:

(i) ни из какой вершины нельзя двигаться по стрелкам бесконечно долго;

(ii) если из одной вершины A выходят стрелки в две вершины x и y, то существует вершина z, в которую можно дойти по стрелкам и из x, и из y.

Докажите, что для любой вершины A существует такая вершина B, что любой путь по стрелкам, начинающийся в A и продолжающийся, пока это возможно, заканчивается в B.

2. Прямоугольник на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 разбит на фигурки домино (прямоугольники, состоящие из двух клеток с общей стороной). Докажите, что все вершины клеток на границе и внутри прямоугольника можно раскрасить в три цвета так, чтобы для каждых двух вершин, находящихся на расстоянии 1, выполнялось следующее условие: эти вершины разного цвета, если соединяющий их отрезок лежит на границе одной из фигурок домино, и одинакового цвета в противном случае.

3. n клиентов коммерсанта живут в пунктах, расположенных вдоль кольцевой дороги. Из них k клиентов имеют долги перед коммерсантом по a_1, $a_2, \ldots$, a_k рублей, а коммерсант перед остальными $n-k$ клиентами имеет долги b_1, $b_2, \ldots$, b_{n-k} рублей, причем $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-k}$. Докажите, что коммерсант, не имеющий денег, может рассчитаться по всем своим долгам и долгам клиентов, начав обход клиентов вдоль дороги с одного из пунктов и не пропуская ни одного из своих клиентов.

4. В книжном шкафу на нескольких полках стояли книги, при этом хотя бы одна из полок была пустой. Эти книги переставили так, что теперь на каждой полке стоит хотя бы одна книга. Докажите, что найдется книга, на одной полке с которой теперь стоит меньше книг, чем до перестановки.

5. За круглым столом сидят 12 человек, а на столе стоят 28 бутылок. Если на отрезке, соединяющем двух людей, стоит бутылка, они не могут разглядеть друг друга через зеленое стекло. Докажите, что есть два человека, которые все еще могут разглядеть друг друга.

6. Докажите, что шахматный конь не может обойти доску $4 \times n$, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернуться в исходную точку.

7. На плоскости провели 100 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, и отметили все точки их пересечения. После этого все прямые и k отмеченных точек стерли. При каком наибольшем k по оставшимся точкам пересечения заведомо можно восстановить исходные прямые?

8. Алфавит A состоит из n букв. S – множество слов конечной длины, составленных из букв этого алфавита. Известно, что любая бесконечная последовательность букв алфавита A начинается ровно с одного из слов множества S. Докажите, что множество S конечно.