Серия 3: хчл.

1. Назовем приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами сносным, если его корни – целые числа, а коэффициенты не превосходят по модулю 2013. Вася сложил все сносные квадратные трехчлены. Докажите, что у него получился трехчлен, не имеющий действительных корней.

2. Докажите, что если для чисел p_1, p_2, q_1, q_2 выполнено неравенство $(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0$, то квадратные трехчлены $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ имеют вещественные корни и между двумя корнями каждого из них лежит корень другого.

3. Найдите наименьшее положительное число a такое, что для любого квадратного трехчлена $f(x)$, удовлетворяющего при $0 \leqslant x \leqslant 1$ неравенству $|f(x)| \leqslant 1$, выполняется неравенство $|f'(1)| \leqslant a$.

4. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, что для любого целого положительного n уравнение

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ раз}} = 0$$

имеет ровно 2^n различных действительных корней?

5. Корень трехчлена $ax^2 + bx + b$ умножили на корень трехчлена $ax^2 + ax + b$ и получили в произведении 1. Найдите эти корни.

6. Существуют ли четыре таких квадратных трехчлена, что, записав их в любом порядке, мы сможем найти число, при подстановке которого в эти трехчлены полученные значения будут записаны в строго возрастающем порядке?

7. Существует ли квадратный трехчлен f с положительными коэффициентами такой, что для любого положительного числа x имеет место равенство $[f(x)] = f([x])$?

8. Квадратные трехчлены f и g с целыми коэффициентами принимают только положительные значения и $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant \sqrt{2}$ при всех вещественных x. Докажите, что $\frac{f(x)}{g(x)} > \sqrt{2}$ при всех вещественных x.