Серия 2(а), с производной многочлена и кое-чем ещё

1. Пусть $f(x) \in R[x]$ – многочлен над кольцом R. Разложим многочлен $f(x+h) \in R[x,h]$ по степеням h: $f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + h^2 f_2(x) + \ldots$, или $f(x+h) \equiv f(x) + hf_1(x) \pmod{h^2}$. *Производная* многочлена $f(x)$ (обозначается $f'(x)$) – это многочлен $f_1(x)$. Докажите, что а) $(f+g)' = f' + g'$; б) $(fg)' = f'g + fg'$; в) если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, то $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$; г) если α – корень многочлена f кратности k, то α – корень f' кратности не менее $k-1$.

2. Докажите *формулу Тейлора*: для многолена $P(x)$ степени n с вещественными коэффициентами $P(x+h) = P(x) + \frac{P'(x)}{1!}h + \frac{P''(x)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x)}{n!}h^n$ (здесь $P^{(k)}(x)$ – k–я производная многочлена $P(x)$).

3. Найдите все a, для которых многочлен $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ делился на $(x-1)^2$.

4. Назовём ориентированный граф *k-дольным*, если его вершины разбиваются на множества A_1, A_2, ..., A_k так, что конец каждого ребра с началом в A_i принадлежит A_{i+1} (мы считаем $A_{k+1} = A_1$). Докажите, что граф является k-дольным тогда и только тогда, когда в любом неориентированном цикле (цикле, составленном из рёбер без учёта направления) разность количеств рёбер, идущих в одном и другом направлениях, кратна k.

5. На ветвях большого дуба сидят несколько ворон. По сигналу они начинают пересаживаться. Каждую минуту одну из ворон прогоняют соседки, сидящие на той же ветке, и эта ворона перелетает на следующую по высоте (более высокую) ветку; если сверху веток нет, ворона улетает. Все ветки расположены на различной высоте. Докажите, что время, через которое процесс закончится (т. е. на каждой ветке будет не более одной вороны), не зависит от порядка перелетов, а зависит только от начального расположения ворон.

6. Фишка может находиться в одной из 169 точек $(x;y)$, где x и y – целые числа, $0 \leqslant x \leqslant 12$, $0 \leqslant y \leqslant 12$. Фишка может пойти из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2), только если каждое из чисел $|x_1 - x_2|, |x_1 - y_2|, |y_1 - x_2|, |y_1 - y_2|$ не меньше двух и не больше девяти. Докажите, что фишка не может обойти все 169 точек, побывав в каждой из них ровно по разу.

7. Существует ли бесконечная чисто периодическая последовательность, состоящая из букв a и b, такая, что при одновременной замене всех букв a на aba и букв b на bba она переходит в себя (возможно, со сдвигом)?