

Серия 2(а): просто алгебра

1. Докажите, что для любых действительных a, b, c, d верно неравенство

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1)(d^2 - d + 1) \geq \frac{9}{16}(a - b)(b - c)(c - d)(d - a).$$

2. Многочлен $P(x)$ степени 100 с вещественными коэффициентами таков, что $P(x) - 1$ имеет 65 корней, а $P(x) + 1$ имеет 75 корней. Какое наименьшее число корней может иметь многочлен $P(x)$?

3. Докажите, что для любого натурального n и для любого $x > 1$ верно неравенство $\{x\} + \{2x\} + \dots + \{nx\} \leq \frac{nx}{2}$.

4. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{ab+bc+cd+de}{2a^2+b^2+c^2+d^2+2e^2}$, где a, b, c, d, e – положительные числа.

5. Последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) при каждом натуральном n удовлетворяют условиям $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2b_n}$, $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2a_n}$. Докажите, что $\max(a_{2024}, b_{2024}) > 44$.

6. Определим $f(x) = \frac{(2x-1)6^x}{2^{2x-1}+3^{2x-1}}$. Вычислите сумму

$$f\left(\frac{1}{2024}\right) + f\left(\frac{3}{2024}\right) + f\left(\frac{5}{2024}\right) + \dots + f\left(\frac{2023}{2024}\right).$$

7. Даны бесконечные последовательности неотрицательных чисел a_1, a_2, a_3, \dots и b_1, b_2, b_3, \dots . Для любого натурального числа n выполняются следующие соотношения: $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ и $a_{n+1}b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}$. Оказалось, что $b_{2016} = 1$. Найдите все возможные значения числа a_1 .

8. Докажите, что при всех положительных p и q , меньших единицы, верно неравенство

$$2(p+q) > \left(\frac{1-q}{p}\right)^p \left(\frac{q}{1-p}\right)^{1-p}.$$