Вступительные задачи, 11 класс

1. Две неравные окружности ω_1 и ω_2 касаются внутренним образом окружности ω в точках A и B. Пусть C и D – точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2 (C и D лежат внутри ω). Прямая CD пересекает ω в точках E и F. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках E и F, пересекаются на прямой AB.

2. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 11 всем известных гениев. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает прием, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять 10 гениев, как бы ни действовала первая фирма?

3. Даны n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий. Известно, что каждое из чисел $1, 2, 3, \ldots, 2n!$ принадлежит хотя бы одной из прогрессий.

а) Докажите, что каждое целое число принадлежит хотя бы одной из данных прогрессий.

б) Останется ли верным это утверждение, если заменить $2n!$ на $2^n - 1$?

в) Попробуйте доказать, что оно останется верным, если заменить $2n!$ на 2^n.

4. Внутри ветви гиперболы $x = \sqrt{y^2+1}$ расположены окружности ω_1, ω_2, ω_3, $\ldots$ так, что при каждом $n > 1$ окружность ω_n касается гиперболы в двух точках и касается окружности ω_{n-1}, а окружность ω_1 имеет радиус 1 и касается гиперболы в точке $(1, 0)$. Докажите, что для любого n радиус окружности ω_n равен натуральному числу.

5. Пусть $a_0 > a_1 > \ldots > a_s = 0$ – такая последовательность целых чисел, что натуральные числа a_0 и a_1 взаимно просты, а при $i \geqslant 1$ число a_{i+1} равно остатку от деления a_{i-1} на a_i с неполными частными $t_i = \left[\frac{a_{i-1}}{a_i}\right]$. Построим последовательность $b_0, b_1, \ldots, b_s$ с помощью соотношения $b_{i+1} = b_{i-1} + t_i b_i$, положив $b_0 = 0$ и $b_1 = 1$. Докажите, что $b_s = a_0$.

6. Сто неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ расставлены по кругу так, что сумма любых трех подряд идущих чисел не превосходит 1 (т.е. $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1$, $x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 1, \ldots, x_{100} + x_1 + x_2 \leqslant 1$). Найдите наибольшее значение суммы

$$S = x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_4x_6 + \ldots + x_{99}x_1 + x_{100}x_2.$$

7. Прямоугольный параллелепипед $2 \times 2 \times 100$ нужно разбить на кирпичи $1 \times 1 \times 2$. Докажите, что количество способов сделать это является точным квадратом. (При подсчете параллелепипед не вращают и не переворачивают.)

8. В ряд стоят 100 коробок. В самой левой лежат 100 спичек, остальные коробки пусты. За ход разрешается выбрать любые две соседние коробки и переложить одну спичку из левой коробки в правую, если после перекладывания в левой коробке будет не меньше спичек, чем в правой. Ходы делаются до тех пор, пока возможно. Докажите, что конечный результат не зависит от последовательности ходов.

9. Рассматриваются слова, состоящие из букв А и Б. Найдите наименьшее n, удовлетворяющее следующему условию: в любом слове длины n найдутся два идущих подряд одинаковых подслова длины больше 1.

10. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?