

Серия 9(а): всякое разное

1. На плоскости дано k точек, из каждой проведено несколько лучей так, что никакие два из них не пересекаются. Докажите, что среди всех отрезков, соединяющих исходные точки, можно указать $k - 1$ не имеющих общих внутренних точек ни с одним из лучей и друг с другом.

2. Имеются магнитофон, 25 бобин с магнитной пленкой и одна пустая бобина. Разрешается перематывать пленку с любой бобины на пустую (при этом она, конечно, окажется намотанной в обратном направлении). Можно ли добиться того, чтобы каждая лента оказалась на той же бобине, что и вначале, но намотанная в другом направлении?

3. Множество X на координатной плоскости удовлетворяет следующим условиям:

а) пересечение множества X с любым единичным квадратом, координаты вершин которого – целые числа, состоит из двух параллельных отрезков с концами в серединах сторон квадрата;

б) множество X переходит в себя при сдвиге на 25 единиц в направлении, параллельном любой координатной оси.

Докажите, что X содержит бесконечно длинную ломаную.

4. Дана конечная последовательность из нулей и единиц. Одновременно между каждыми двумя соседними нулями ставят единицу, а между каждыми двумя соседними цифрами, среди которых есть единица, ставят ноль. Докажите, что по исходной последовательности можно указать такое число C , что, сколько бы раз мы ни повторяли описанную операцию, модуль разности количества нулей и удвоенного количества единиц не превзойдет C .

5. На планете P стран ($1000 < P < 2000$), некоторые тройки которых образуют трехсторонние союзы, причем каждые две страны входят вместе ровно в один такой союз. Известно, что если тройки ABF , BCG , CAH образуют союзы, то и тройка FGH образует союз. Найдите все P , при которых такое возможно.

6. Несколько шахматистов разыграли турнир в один круг, в котором не было ничьих. В турнирной таблице расставили 0 и 1 в соответствии с результатами, после чего обнаружилось, что судьи забыли, кто из шахматистов каким номером обозначен. Докажите, что число способов восстановить нумерацию нечетно.

7. Пьяный библиотекарь каждую минуту снимает с полки какой-то том Британской Энциклопедии, стоящий не на своем месте, и ставит его на свое место. Если в некоторый момент все тома окажутся на своих местах, то библиотекарь запишется в Общество Трезвости. Может ли Общество однозначно рассчитывать на пополнение своих рядов?

8. Два многоугольника называются положительно гомотетичными, если один из них можно получить из другого параллельным переносом или гомотетией с положительным коэффициентом. Докажите, что если два выпуклых положительно гомотетичных многоугольника имеют общую точку, то один из них содержит вершину другого.