Серия 8(а), пограничная

1. Пусть p — простое число, а a, b и c — натуральные числа. Известно, что все пять чисел p, a, b, c и $pa + b$ попарно взаимно просты. Докажите, что среди натуральных чисел $k < pc$, удовлетворяющих условию

$$\left\{\frac{ak}{c}\right\} + \left\{\frac{bk}{pc}\right\} \geqslant 1,$$

поровну чисел, дающих остатки 1 и 2 при делении на p.

2. Дано простое число $p > 3$. Натуральное число n таково, что $n^2 + n + 1$ делится на p. Докажите, что $(n+1)^p - n^p - 1$ делится на p^3.

3. Даны натуральные числа $k > m$. Пусть A — алфавит из m букв, а B — алфавит из $2m$ букв. Обозначим через a_k количество $2k$-буквенных слов в алфавите A, в каждом из которых каждая буква из A присутствует, причём чётное число раз. Обозначим через b_k количество $2k$-буквенных слов в алфавите B, в каждом из которых каждая буква из B присутствует нечётное число раз. Найдите a_k/b_k.

4. Пусть p — простое число, дающее остаток 1 при делении на 4, а множество $A \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ таково, что для любых $a, b \in A$ существует целое t такое, что $a - b - t^2$ делится на p. Докажите, что $|A| < \sqrt{p}$.

5. Каждой паре натуральных чисел $i, j \leqslant 143$ сопоставляется натуральное число $i \diamond j \leqslant 143$. Определяемая операция должна удовлетворять условиям

$$i \diamond i = i, \quad (i \diamond j) \diamond (k \diamond \ell) = i \diamond \ell$$

при всех натуральных $i, j, k, \ell \leqslant 143$. Найдите количество таких операций.

6. Рассмотрим 10000 различных конечных множеств F_1, F_2, $\ldots$, F_{10000}. Конечное множество A назовём *осколочным*, если для любого подмножества $X \subseteq A$ найдётся такое множество F_i, что $A \cap F_i = X$. Докажите, что существует не менее 10000 осколочных множеств.

7. Существуют ли на плоскости несколько точек и несколько прямых таких, что каждая точка лежит ровно на 2019 прямых и на каждой прямой лежит ровно 2019 точек?

8. *Расстоянием* между двумя точками на окружности назовем длину наименьшей дуги между ними. На окружности единичной длины отметили n точек так, что для любого диаметра окружности количества отмеченных точек с разных сторон от этого диаметра отличаются не более, чем на 100. Докажите, что для любой точки окружности сумма расстояний от нее до отмеченных не меньше, чем $n/4 - 25$.