Серия 7(а): разнообразная комбинаторика с нотками арифметики.

1. Докажите, что для любого $k > 1$ найдется степень 2 такая, что среди k последних ее цифр не менее половины составляют девятки.

2. Для какого наибольшего n можно придумать две бесконечные в обе стороны последовательности A и B такие,что любой кусок последовательности B длиной n содержится в A, A имеет период 2019, а B этим свойством не обладает (непериодична или имеет период другой длины)? Последовательности могут состоять из произвольных символов. Речь идет о минимальном периоде.

3. Для чисел 1, ..., 1999, расставленных по окружности, вычисляется сумма произведений всех наборов из 10 чисел, идущих подряд. Найдите расстановку чисел, при которой полученная сумма наибольшая.

4. На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход можно передвинуть любую из них на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу?

5. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарику.

а) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое (можно брать камни из любой коробочки, не только той, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу).

6. По периметру круглого торта диаметром n/π метров расположены n вишенок. Если на концах некоторой дуги находятся вишенки, то количество остальных вишенок на этой дуге меньше, чем длина дуги в метрах. Докажите, что торт можно разрезать на n равных секторов так, что в каждом куске будет по вишенке.

7. Дано множество M, состоящее из 101 элемента. Некоторые его 50-элементные подмножества окрашены в красный цвет, а остальные — в синий цвет. Докажите, что найдутся два непересекающихся 50-элементных подмножества, окрашенных в один и тот же цвет.

8. n детей встали в круг, каждый смотрит в затылок следующему по часовой стрелке. Они пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n без повторений. Если ребёнок с номером k смотрит в затылок ребёнку с номером, не превосходящим $k-2$, они могут поменяться местами (в каждый момент происходит не более одного такого обмена). Докажите, что не получится сделать $C_n^3 + 1$ таких обменов.