Серия 6(а): комбинаторная геометрия и геометрические неравенства.

1. Существует ли такое непустое подмножество точек M числовой прямой, что для любого числа a из множества M и любого вещественного r существует ровно одно число b из M такое, что $|a-b|=r$?

Назовем Вписанным и Описанным кругами выпуклой фигуры Φ соответственно круг наибольшего радиуса, содержащийся в ней, и круг наименьшего радиуса, содержащий ее. (Проверьте, понимаете ли вы, что радиус Вписанного круга не меньше $\frac{S}{P}$.)

2. Докажите, что для всякого выпуклого многоугольника M с площадью S и с периметром P, радиусом Вписанного круга r и радиусом Описанного круга K имеют место неравенства

а) $P^2-4\pi S>(P-2\pi r)^2$;

б) $P^2-4\pi S>(2\pi R-P)^2$.

3. Монету радиуса r перемещают по плоскости так, что ее центр обходит контур выпуклого многоугольника, описанного около круга радиуса $R>r$ и имеющего периметр P. Найдите площадь фигуры, образованной следом монеты (многоугольного кольца).

4. Докажите, что в выпуклом n-угольнике с площадью S, периметром P и углами A_1, A_2, …, A_n

$$\frac{P^2}{S}\geqslant 4(\operatorname{ctg}\frac{A_1}{2}+\operatorname{ctg}\frac{A_2}{2}+\ldots+\operatorname{ctg}\frac{A_n}{2}).$$

5. Замкнутая ломаная M имеет нечетное число вершин – последовательно $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$. Обозначим через $S(M)$ новую замкнутую ломаную, последовательные вершины B_1, B_2, …, B_{2n+1} которой являются серединами звеньев ломаной M: B_1 – середина отрезка A_1A_2, B_2 – середина A_3A_4, …, B_{n+1} – середина $A_{2n+1}A_1$, B_{n+2} – середина $A_2A_3, \ldots, B_{2n+1}$ – середина $A_{2n}A_{2n+1}$. Докажите, что в последовательности построенных таким образом ломаных $M_1=S(M)$, $M_2=S(M_1)$, $M_3=S(M_2)$, …, $M_k=S(M_{k-1})$, найдется замкнутая ломаная, гомотетичная исходной ломаной M.

6. Внутри тетраэдра выбрана точка M. Докажите, что хотя бы одно ребро тетраэдра видно из точки M под углом, косинус которого не больше, чем $-1/3$.

7. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC (но не в вершинах) выбраны точки D, E, F соответственно. Обозначим через d_0, d_1, d_2, d_3 длины наибольших сторон треугольников DEF, ADF, BDE, CEF. Докажите, что $d_0\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\min(d_1,d_2,d_3)$. В каких случаях имеет место равенство?

8. Множество M состоит из k попарно не пересекающихся отрезков, лежащих на одной прямой. Известно, что любой отрезок длины, не большей 1, можно расположить на прямой так, чтобы его концы принадлежали множеству M. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M, не меньше $1/k$.