Серия 5(а), разноцветная

1. Внутри выпуклого многоугольника площади S_1 и периметра P_1 расположен выпуклый многоугольник площади S_2 и периметра P_2. Докажите неравенство: $2\frac{S_1}{P_1} > \frac{S_2}{P_2}$.

2. Правильный шестиугольник разрезан на N равновеликих параллелограммов. Доказать, что N делится на 3.

3. Можно ли раскрасить натуральные числа в 7 цветов так, чтобы для любого натурального n числа n, $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, $6n$ и $7n$ были раскрашены в разные цвета?

4. Некоторые из точек плоскости, имеющих целочисленные координаты, окрашены в n цветов. Известно, что никакие четыре точки одного цвета не лежат на одной окружности. Докажите, что существует окружность радиуса 2017, внутри которой нет ни одной окрашенной точки.

5. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

6. Дан правильный 2003-угольник. Его вершины покрашены в два цвета: 500 из них – в красный цвет, а остальные — в синий. Докажите, что количество равнобедренных треугольников с одноцветными вершинами не зависит от способа покраски.

7. Можно ли раскрасить все положительные действительные числа в 10 цветов так, чтобы любые два числа, десятичная запись которых отличается только в одном разряде, были разного цвета? (Десятичные записи, в которых все цифры, начиная с некоторой – девятки, не рассматриваются).

8. Плоскость раскрасили в 5 цветов. Докажите, что существует 2 точки одного цвета, расстояние между которыми отлично от 1 не более чем на 0,001.