

Серия 4(а), в основном комбинаторно-геометрическая

1. Существуют ли такие квадратные трехчлены P , Q , R , что для любых целых x и y найдется целое z , удовлетворяющее равенству $P(x) + Q(y) = R(z)$?
2. Для 100 точек общего положения на плоскости (никакие 3 точки не лежат на одной прямой) требуется провести k прямых, не проходящих ни через одну из них так, чтобы в каждой части плоскости, на которые прямые делят плоскость, оказалось не более одной данной точки. Какого наименьшего k будет достаточно, чтобы это можно было сделать при любом расположении точек?
3. На плоскости расположены квадрат со стороной 20 и три круга радиуса 10. Обозначим через S площадь части квадрата, не покрытой кругами, а через s — наименьшее целое число, не меньшее S . Найдите наименьшее возможное значение s .
4. Выпуклый n -угольник разбит диагоналями, не пересекающимися во внутренних точках, на треугольники. Докажите, что можно выбрать хотя бы $\lceil n/3 \rceil$ вершин, которые попарно не соединены между собой ни сторонами, ни диагоналями разбиения.
5. На координатной плоскости расположен выпуклый многоугольник M . Известно, что в него можно поместить отрезок длины a , параллельный оси Ox , и отрезок длины b , параллельный оси Oy . Докажите, что в многоугольник M можно поместить квадрат со стороной $\frac{ab}{a+b}$.
6. На единичной решетке дан выпуклый $2n$ -угольник. Докажите, что его площадь а) не меньше, чем $n(n-1)/2$; б) не меньше, чем $n^3/100$.
7. Существует ли такое отображение F плоскости в себя, что для любого выпуклого четырехугольника $ABCD$ точки $F(A)$, $F(B)$, $F(C)$, $F(D)$ образуют вершины невыпуклого четырехугольника?
8. Квадрат разрезан на n прямоугольников (стороны которых параллельны сторонам квадрата). Каждая прямая, параллельная одной из сторон квадрата, которая пересекает внутренность квадрата, пересекает и внутренность некоторого прямоугольника. Докажите, что среди прямоугольников разбиения существует такой, который не примыкает ни к одной из сторон квадрата.