Серия 3(а): бюрократическая комбинаторика

1. В таблице $2^{\times}n$ были выписаны всевозможные строки длины n из чисел 1 и -1. Затем часть чисел заменили нулями. Докажите, что можно выбрать несколько строк, сумма которых есть строка из нулей. (Суммой строк называется строка, элементы которой являются суммами соответствующих элементов слагаемых.)

2. В ботаническом определителе растения описываются ста признаками. Каждый из признаков может либо присутствовать, либо отсутствовать. Определитель считается хорошим, если любые два растения различаются более чем по половине признаков. Доказать, что в хорошем определителе не может быть описано более 50 растений.

3. Окружность разбита на $2n$ равных дуг. Вася помечает две дуги числом 1, две – числом 2, ..., две – числом n. Затем для каждых двух дужек с одинаковыми номерами он рассматривает выпуклую "полоску", ограниченную этими дугами и двумя отрезками, соединяющими их концы. Найдите количество способов пометить дуги, при которых рассмотренные n полосок покроют единичный круг.

4. В каждой граничной клетке таблицы 2019×2019 поставили по целому числу. Докажите, что можно заполнить все остальные клетки целыми числами так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 3×3, содержащемся в таблице, была равна нулю.

5. Из бесконечного клетчатого листа бумаги вырезаны все клетки, обе координаты которых делятся на 4. Докажите, что не существует бесконечного маршрута коня, проходящего ровно по одному разу по всем оставшимся клеткам.

6. Рассмотрим на плоскости множество M точек с натуральными координатами. Каждую точку $P(a,b)$ из M соединим отрезком с каждой из точек множества M, находящейся на прямой $x=a+b$ над биссектрисой первого координатного угла, т.е. с точками множества

$$\{(a+b,c)\mid c\in\mathbb{Z}, c>a+b\}.$$

Докажите, что не существует раскраски точек из M в конечное число цветов, в которой любые две точки, соединенные отрезком, были бы разного цвета.

7. Для каких $n\geqslant 3$ можно расставить числа от 1 до n в вершинах правильного n-угольника так, чтобы выполнялось следующее свойство: для любых трех вершин A, B и C таких, что $AB=AC$, число в вершине A либо больше, либо меньше обоих чисел в вершинах B и C?

8. Имеется 20 различных натуральных чисел, множество попарных сумм которых (включая суммы каждого числа с самим собой) содержит ровно 201 элемент. Из какого наименьшего количества элементов может состоять множество (положительных) попарных разностей этих чисел?