Серия 2(а), покороче

1. Докажите, что в вершинах правильного n-угольника можно расставить не равные нулю а) вещественные, б) целые числа так, чтобы для любого множества вершин исходного многоугольника, являющихся вершинами правильного k-угольника ($k \leqslant n$), сумма стоящих в них чисел была равна нулю.

2. Назовем конечную последовательность a_1, a_2, $\ldots$, a_n p-уравновешенной, если все суммы вида $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \ldots$ ($k = 1, 2, \ldots, p$) равны между собой. Докажите, что если 50-членная последовательность p-уравновешенна для $p = 3$, 5, 7, 11, 13, 17, то все ее члены равны нулю.

3. На плоскости дан правильный n-угольник с центром O. Через $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{v_n}$ обозначены векторы, ведущие из O в вершины многоугольника, причем занумерованы они по порядку, считая от какой-то вершины. Докажите, что если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ – некоторые вещественные числа, то вектор $a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{v_n}$ – ненулевой.

4. Квадрат разбит на несколько прямоугольников так, что любая горизонтальная прямая пересекает ровно n прямоугольников, а любая вертикальная прямая – ровно m прямоугольников (рассматриваются только прямые, не содержащие сторон прямоугольников). Каково минимально возможное число прямоугольников разбиения?

5. Вещественные числа a, b и c таковы, что числа $\frac{1+bc}{b-c}$, $\frac{1+ca}{c-a}$, $\frac{1+ab}{a-b}$ – целые. Докажите, что эти целые числа попарно взаимно просты.

6. M – некоторое множество простых чисел, в котором больше одного элемента. Известно, что для всякого (конечного) подмножества $N \subset M$ число $(\prod\limits_{k\in N} k) - 1$ имеет простые делители только из M. Докажите, что M совпадает с множеством всех простых чисел.