Серия 1(а), арифметическая

1. Про n чисел, произведение которых равно p, известно, что разность между p и каждым из этих чисел – нечетное целое число. Докажите, что все эти n чисел иррациональны.

2. Обозначим через $[a, b]$ наименьшее общее кратное целых чисел a и b. Докажите, что для любых $n+1$ чисел $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ выполнено неравенство:

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \ldots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} \leqslant 1 - \frac{1}{2^n},$$

если а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) n – любое натуральное число.

3. Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 + z^2 = t^4$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y, z, t, взаимно простых в совокупности.

4. Найдите все рациональные p, q и r такие, что $p\cos\frac{\pi}{7} + q\cos\frac{2\pi}{7} + r\cos\frac{3\pi}{7} = 1$.

5. $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + 1$ – многочлен с целыми коэффициентами такой, что $a_k = a_{n-k}$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Докажите, что существуют бесконечно много пар натуральных чисел x и y, для которых $P(x)$ делится на y и $P(y)$ делится на x.

6. Последовательность векторов $\{\vec{e}_n\}$ на плоскости задана условиями: $\vec{e}_1 = (0; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; 0)$, $\vec{e}_{n+2} = \vec{e}_{n+1} + \vec{e}_n$ при $n \geqslant 1$. Отложим от начала координат все векторы, являющиеся суммами нескольких различных векторов из последовательности $\{\vec{e}_n\}$. Докажите, что множество концов отложенных векторов состоит из всех точек с целыми неотрицательными координатами, лежащих внутри некоторой полосы между параллельными прямыми.

7. Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел x, y, z, больших 10^{10}, что $x^8 + y^8 + z^8$ делится на $x^4 + y^4 + z^4$?

8. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих равенству

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1.$$