Вступительные задачи, 10-11 классы

1. Докажите, что если соединить середины последовательных сторон выпуклого n-угольника M, то у полученного многоугольника

а) периметр не меньше половины периметра M $(n \geqslant 3)$;

б) площадь не меньше половины площади M $(n \geqslant 4)$.

2. Несколько человек в течение t минут наблюдало за улиткой. Каждый наблюдал за ней ровно 1 минуту и заметил, что за эту минуту улитка проползла ровно 1 метр. Ни в один момент времени улитка не оставалась без наблюдения. Какой наименьший и какой наибольший путь могла она проползти за эти t минут?

3. Докажите, что если $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ – натуральные числа, то

$$\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \ldots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{n^2}.$$

4. В множестве E, состоящем из n элементов, выделены m различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для каждых двух элементов E найдется ровно одно из данных подмножеств, в которое входят оба этих элемента. Докажите, что $m \geqslant n$.

5. У трехгранного угла проведены биссектрисы плоских углов. Докажите, что попарные углы между тремя этими биссектрисами либо все тупые, либо все острые, либо все прямые.

6. По арене круглого цирка радиуса 10 м бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он побежал 30 км. Докажите, что сумма всех углов, на которые он поворачивал, не меньше 2998 радиан.

7. а) Все натуральные числа (записанные в десятичной системе) разбиты на два класса. Докажите, что любую бесконечную десятичную дробь можно разрезать на такие конечные куски, чтобы все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежали одному классу.

б) Та же задача, но натуральные числа разбиты не на два, а на несколько классов.

8. Докажите, что сумма

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 \frac{1}{4} + C_{n-2}^2 \frac{1}{4^2} - \ldots + (-1)^i C_{n-i}^i \frac{1}{4^i} + \ldots$$

(сумма берется по всем целым i, $0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}$) равна $\frac{n+1}{n}$.

9. а) Докажите, что если числа $a + b$ и $a^2 + b$ делятся на m, то $a^n + b$ также делится на m при любом n (a, b и m – некоторые натуральные числа).

б) Докажите, что если $f(n) = a^n + b_0 + b_1 n + \ldots + b_k n^k$ делится на m при $n = 1, n = 2, \ldots, n = k+1, n = k+2$, то $f(n)$ делится на m при любом n ($a, b_0, b_1, \ldots, b_k, m$ – некоторые натуральные числа).

10. Докажите, что каждое натуральное число представляется в виде $a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + 2^n a_n$, где каждое из чисел a_k равно 0, -1 или 1 и $a_k \cdot a_{k+1} = 0$ для всех $0 \leqslant k \leqslant n-1$, причем такое представление единственно.