Серия 9(b): разбираем комбинаторную геометрию на геометрию и комбинаторику.

1. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана такая точка K, что $\angle AKC = 2\angle ABC$ и $\frac{AK}{KC} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$. Точки A_1 и C_1 – середины сторон BC и AB. Докажите, что точка K лежит на описанной окружности треугольника A_1BC_1.

2. Последовательность $x_1, x_2, \dots$ задана условиями $x_1 = 0{,}001$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$. Докажите, что $x_{1001} < 0{,}0005$.

3. Пусть $n > 2$ – натуральное число. Назовём множество S натуральных чисел *всеобъемлющим*, если для любого натурального $r < n$ в r можно указать несколько элементов, сумма которых даёт остаток r при делении на n. Докажите, что из любого всеобъемлющего множества можно выбрать всеобъемлющее подмножество, содержащее не более $n - 1$ элемента.

4. а) Все натуральные числа (записанные в десятичной системе) разбиты на два класса. Докажите, что любую бесконечную десятичную дробь можно разрезать на такие конечные куски, чтобы все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежали одному классу.

б) Та же задача, но натуральные числа разбиты не на два, а на несколько классов.

5. На каждом из нескольких кусков бумаги произвольной формы поставлена клякса (произвольной формы). Назовем промокашку подходящей для данного куска, если её можно разместить внутри этого куска так, что она закроет кляксу. Пусть набор промокашек, имеющих форму кругов разных радиусов, обладает таким свойством: для произвольных двух данных кусков найдется промокашка, подходящая для каждого из них. Докажите, что тогда в этом наборе найдется промокашка, подходящая для всех кусков.

6. При каких натуральных m и n ($m < n$) можно закрасить некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в черный цвет так, чтобы любой прямоугольник размера $m \times n$ содержал ровно одну черную клетку?

7. Можно ли представить все пространство в виде объединения прямых, каждые две из которых скрещивающиеся (то есть не лежат в одной плоскости)?

8. На плоскости дан набор из n векторов, длина каждого из которых не превосходит 1. Докажите, что, заменив некоторые векторы этого набора на противоположные, можно получить такой набор n векторов, сумма которых имеет длину

а) не превосходящую $\sqrt{n}$,

б) не превосходящую $\sqrt{2}$.

9. Два велосипедиста едут по двум пересекающимся окружностям. Каждый едет по своей окружности с постоянной скоростью. Выехав одновременно из одной из точек их пересечения и сделав по одному обороту, велосипедисты вновь встретились в этой точке. Докажите, что на плоскости, в которой лежат окружности, существует такая неподвижная точка, расстояния от которой до велосипедистов все время одинаковы, если они едут: а) в одном направлении (против часовой стрелки); б) в разных направлениях.