Серия 8(b): всякое и комбинаторная геометрия.

1. Существует ли такое натуральное N, что каждое рациональное число между нулем и единицей представляется в виде суммы N чисел, обратных натуральным?

2. В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть по лесу провод из точки A в точку B, расстояние между которыми равно l. Докажите, что для этой цели связисту достаточно иметь кусок провода длинной $1,6l$.

3. Внутри выпуклого $2n$-угольника взята произвольная точка P. Через каждую вершину и точку P проведена прямая. Докажите, что найдется сторона многоугольника, с которой ни одна из проведенных прямых не имеет общих точек (кроме, быть может, концов стороны).

4. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что если прямая проходит через две или более отмеченных точек, то сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны нулю.

5. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится 3 ребра. Известно, что каждая его грань является многоугольником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.

6. Даны натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ и $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ равны между собой и меньше mn. Докажите, что в равенстве $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.

7. На плоскости дано 1000 квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Пусть M – множество центров этих квадратов. Докажите, что можно отметить часть квадратов так, чтобы каждая точка множества M попала не менее, чем в один и не более, чем в четыре отмеченных квадрата.

8. p – простое нечетное число. Дано $p-1$ целых чисел, не делящихся на p. Докажите, что, заменив некоторые из этих чисел на противоположные, можно получить $p-1$ чисел, сумма которых делится на p.

9. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны такие точки K и L соответственно, что $\angle KCB = \angle LAB = \alpha$. Из точки B опущены перпендикуляры BD и BE на прямые AL и CK соответственно. Точка F – середина стороны AC. Найдите углы треугольника DEF.