Серия 7(b), дискретная

1. Пусть a, b – натуральные числа. Проведем через точку $(a;b)$ прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник.

а) Докажите, что количество точек с целыми неотрицательными координатами, которые лежат внутри или на сторонах этого треугольника, превышает $2ab+a+b$.

б) Докажите, что эта оценка точная: через точку $(a;b)$ можно провести прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник, внутри и на сторонах которого всего $2ab+a+b+1$ точек с целыми неотрицательными координатами.

2. Квадрат клетчатой бумаги, состоящий из $n\times n$ клеток, разрезан на $2n$ прямоугольников. При этом каждый прямоугольник расположен либо целиком ниже, либо выше ступенчатой ломаной, образованной левыми и верхними сторонами клеток, лежащих на диагонали, выходящей из левого нижнего угла. Докажите, что найдется клетка клетчатой бумаги, являющаяся одним из названных прямоугольников.

3. Докажите, что для каждого натурального $n>1$ найдется натуральное z, не представимое в виде $x^n-y!$, где x и y – натуральные.

4. Клетки бесконечного квадранта заполняют по такому правилу. В клетки, лежащие на нижней границе, записывают по порядку числа 0, 1, 2, ...; те же числа записывают в клетки вдоль левой границы. Далее в каждую клетку, левее и ниже которой всё уже заполнено, вписывают наименьшее число, которое ещё не встретилось ни в её строке, ни в её столбце. Докажите, что на пересечении m-й строки и n-го столбца стоит число, в двоичной записи которого единицы располагаются в тех и только тех разрядах, в которых двоичные записи m и n различаются.

5. Клетки бесконечной вправо клетчатой полоски последовательно занумерованы числами 0, 1, 2, ... В некоторых клетках лежат камни. Если на i-ой клетке $(i>0)$ лежит ровно i камней, то разрешается снять их с нее и разложить по одному на клетки с номерами $i-1$, $i-2$, ..., 0. Леша разложил 2006! камней по клеткам с положительными номерами так, чтобы можно было собрать их в нуле, сделав несколько операций. Каким может быть минимальный номер клетки, занятой камнем?

6. В конечной последовательности, состоящей из натуральных чисел, встречается ровно 2018 различных чисел. Известно, что если из какого-нибудь члена этой последовательности вычесть 1, то в полученной последовательности будет встречаться не менее 2018 различных чисел. Найдите минимальную возможную сумму членов исходной последовательности.

7. Можно ли в единичные кубики клетчатого куба $4\times4\times4$ записать 64 попарно различных числа так, чтобы сумма чисел в любых 4 кубиках, центры которых лежат на одной прямой, была одной и той же?

8. Каждая сторона равностороннего треугольника разделена на 6 равных частей, через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам, делящие исходный треугольник на 36 маленьких треугольничков. В каждой из вершин этих треугольничков сидит по жуку. Они одновременно начинают двигаться по линиям деления с равными скоростями. Когда жук попадает в вершину треугольничка, он поворачивает на 60 или 120 градусов. Докажите, что через некоторое время какие-то два жука окажутся в одной вершине маленького треугольничка.