Серия 6(b): клетки и арифметика.

1. Клетчатый квадрат 1024×1024 разрезан на квадраты 32×32. Можно ли раскрасить все его клетки в 512 цветов так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом из получившихся квадратов 32×32 каждый цвет встречался ровно два раза?

2. В каждой клетке квадратной таблицы 2017×2017 написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 2017.

3. а) На бесконечной плоскости, разбитой на квадратные клетки, некоторые – быть может бесконечное – количество прямоугольников размером 1×2 закрашены в черный цвет так, что никакие два черных прямоугольника не имеют общих точек (даже вершин). Докажите, что оставшуюся часть плоскости можно замостить этими прямоугольниками.

б)* Пусть на клетчатой плоскости закрашены несколько прямоугольников размером $m \times n$, не имеющих общих точек. Докажите, что если mn четно, то оставшуюся часть плоскости можно замостить прямоугольниками размером 1×2, а если mn – нечетно, то это не всегда возможно.

4. Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла (“вертикальные” и “горизонтальные” ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?

5. Какое наибольшее число поворотов может содержать замкнутый маршрут ладьи, обходящий по одному разу все клетки шахматной доски 8×8 клеток?

6. Докажите, что квадрат со стороной n (n – натуральное число), расположенный произвольным образом на листе клетчатой бумаги с клетками 1×1, покрывает не более $(n+1)^2$ узлов сетки.

7. Натуральные числа m и n неравенству $\sqrt{7} - m/n > 0$. Докажите, что $\sqrt{7} - m/n > 1/mn$.

8. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что для любой возрастающей арифметической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ с натуральными членами последовательность $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3, \ldots$ содержит лишь конечное число простых чисел (возможно, ни одного)?

9. По плоскости с равными постоянными скоростями по попарно непараллельным прямым ползут n черепашек. Докажите, что когда-нибудь они окажутся в вершинах выпуклого n-угольника.