Серия 5(b), про неравенства.

1. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющий неравенству $f(x) \geqslant -\frac{9}{10}$ при любом x. Докажите, что $f(x) \geqslant -\frac{1}{4}$ при любом x.

2. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d верно неравенство $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2$.

3. Докажите, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

4. Наибольшее из неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно a.

а) Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

б) Когда в нем достигается равенство?

5. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите неравенство:

$$\frac{BM \times CM}{BA \times CA} + \frac{CM \times AM}{CB \times AB} + \frac{AM \times BM}{AC \times BC} \geqslant 1.$$

6. Существуют ли такие квадратные трехчлены P, Q, R, что для любых целых x и y найдется целое z, удовлетворяющее равенству $P(x) + Q(y) = R(z)$?

7. Набор из $2n+1$ чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ таков, что $a_k \geqslant \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n-1}}{n} \geqslant \frac{a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}}{n+1}$$

и выясните, для каких наборов оно превращается в равенство.

8. Докажите, что для всех натуральных $n \geqslant 2$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} > n(\sqrt[n]{2} - 1).$$