

Серия 4(b): по следам наших преступлений.

1. Существует ли квадратный трехчлен $q(n)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, для которого $2^n - 1$ делится на $q(n)$ при всех достаточно больших натуральных n ?
2. Доказать, что если число α иррационально, то функция $f(x) = \cos x + \cos \alpha x$ непериодическая.
3. Докажите, что функция $f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$ – непериодическая.
4. Докажите, что среди первых десяти миллионов цифр разложения $\sqrt{2}$ в десятичную дробь ни одна цифра не повторится 5000001 раз подряд.
5. Докажите, что среди чисел $0, 1, 2, \dots, 3^k - 1$ можно найти 2^k различных чисел так, чтобы никакое из них не являлось средним арифметическим двух других.
6. Пусть A и E – две противоположные вершины правильного восьмиугольника. В вершине A находится кенгуру. Из любой вершины восьмиугольника, кроме вершины E , кенгуру может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попав в вершину E , кенгуру останавливается и остается там. Пусть a_n – количество способов, которыми кенгуру может попасть из вершины A в вершину E ровно за n прыжков. Докажите, что $a_{2n-1} = 0, a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}), n = 1, 2, 3, \dots$, где $x = 2 + \sqrt{2}, y = 2 - \sqrt{2}$.
7. Найдите все последовательности (x_n) такие, что $x_n = \sin x_{n+1}$ при всех $n \geq 1$.