

### Серия 3(б): вокруг алгебры.

1. Рассматриваются всевозможные квадратные трехчлены  $x^2 + px + q$  с положительным дискриминантом, у которых коэффициенты  $p$  и  $q$  – целые числа, делящиеся на 5. Найдите наибольшее натуральное  $n$  такое, что у любого трехчлена с описанными свойствами сумма сотых степеней корней – целое число, делящееся на  $5^n$ .

2. Существуют ли такие квадратные трехчлены  $f$  и  $g$  с единичными старшими коэффициентами, что для любого целого  $n$  число  $f(n)g(n)$  – целое, а числа  $f(n)$ ,  $g(n)$  и  $f(n) + g(n)$  – нецелые?

2,5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$  таких, что наибольший простой делитель числа  $n^4 + 1$  больше  $2n$ .

3. Даны вещественные числа  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  из отрезка  $[0, \pi/2]$ , сумма квадратов синусов которых равна 1. Докажите неравенство

$$3(\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_{10}) \leq \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_{10}.$$

4. У алхимика имеется 50 веществ. Он умеет любые 49 веществ, взятых в равных долях, превращать в оставшееся вещество, не меняя суммарной массы. Докажите, что он может добиться того, чтобы всех 50 веществ у него было поровну.

5. Можно ли функцию  $f(x) = 2^x + 3^x + 9^x$  представить в виде суммы конечного числа вещественных периодических функций?

6. Петя задумал приведенный квадратный трехчлен  $f(x)$  с отрицательным дискриминантом. Вася, который хочет его отгадать, каждым ходом называет функцию вида  $y(x) = ax + b$ , а Петя ему в ответ – наименьшее значение функции  $|f(x) - y(x)|$ . За какое наименьшее число ходов Вася наверняка сможет найти все коэффициенты трёхчлена?

7. Дан квадратный трёхчлен  $P(x) = x^2 + bx + c$  с целыми коэффициентами. Известно, что для целых  $x_1, x_2$  и  $x_3$  значения  $P(x_1)$ ,  $P(x_2)$  и  $P(x_3)$  делятся на натуральное число  $n$ . Докажите, что число  $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$  также кратно  $n$ .

8. Существует ли квадратный трехчлен  $q(n)$  с целыми неотрицательными коэффициентами, для которого  $2^n - 1$  делится на  $q(n)$  при всех натуральных  $n$ ?