Серия 2(b): сами попросили.

1. Выпуклый 999-угольник разбили непересекающимися диагоналями на треугольники. После этого k треугольников окрасили в черный цвет, а оставшиеся ℓ – в белый цвет так, что треугольники, граничащие по стороне, окрашены в разные цвета. Какое наибольшее значение может принимать выражение $k-\ell$?

2. Существуют ли два многоугольника (не обязательно выпуклых), обладающих следующим свойством: прикладывая их друг к другу (без наложения), можно получить многоугольники с любым числом сторон от 3 до 100 включительно?

3. Квадрат $ABCD$ разрезан на одинаковые прямоугольники. Покрасим все прямоугольники, которые разрезает диагональ AC. Докажите, что AC делит площадь покрашенной части квадрата пополам.

4. а) На клетчатую плоскость положили 2017 одинаковых квадратов $n \times n$ клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше чем n^2.

б) На прямоугольный лист бумаги положили 2017 одинаковых единичных квадратов, стороны которых параллельны краям листа. Затем закрасили все области, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что площадь закрашенной части листа не меньше 1.

5. На плоскости даны несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены отрезками. Известно, что любая прямая, не проходящая через данные точки, пересекает четное число отрезков. Докажите, что из каждой точки выходит четное число отрезков.

6. Квадрат со стороной 1 разрезан на 100 прямоугольников одинакового периметра p. Найдите наибольшее значение p.

7. На плоскости отмечены 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется не более 1000000 равнобедренных треугольников с вершинами в этих точках.