

Серия 2(в): хчл

1. На параболе $y = x^2$ все пары целых точек, координаты которых по модулю больше 1, соединили отрезками, а затем выкинули из луча Oy все точки пересечения с этими отрезками. Докажите, что у всех оставшихся на луче Oy целых точек с ординатами, большими 1, координаты по y – простые числа.

2. Существует ли многочлен $f(x)$ четвертой степени с целыми коэффициентами такой, что для любого целого k многочлен $f(x) + k$ не представляется в виде произведения двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами?

3. На плоскости отмечено n точек с разными абсциссами. Через каждую пару точек провели *параболу* — график квадратного трёхчлена с единичным старшим коэффициентом. Парабола называется хорошей, если ни на ней, ни выше неё нет отмеченных точек, кроме тех двух, через которые она проведена. Какое наибольшее количество хороших парабол могло получиться?

4. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трехчлен имеет два корня). Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго.

5. Докажите, что каждый квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом можно представить в виде суммы трех квадратных трехчленов с дискриминантом 0 и равными старшими коэффициентами.

6. Дано натуральное число $1 < n < 2024$. Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ определим квадратный трёхчлен $S_i(x) = x^2 - 2024x + \ell_i$, где $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ – различные натуральные числа. Известно, что трёхчлен

$$S_1(x) + S_2(x) + \dots + S_n(x)$$

имеет целый корень. Докажите, что найдётся такое i , что $\ell_i \geq 2024$.

7. Параболы $y = -x^2 + b_1x + c_1$ и $y = -x^2 + b_2x + c_2$ касаются параболы $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к первым двум параболом.

8. Графики двух квадратных трехчленов пересекаются в точках A и B . Через вершину O первого из них проведены прямые OA и OB , они пересекают второй график в точках C и D соответственно. Докажите, что прямая CD параллельна оси абсцисс.