Серия 1(b), комбинаторно-арифметическая

1. Пусть M – множество значений многочлена x^2+1 в целых точках. Докажите, что множество M не содержит ни одной бесконечной (непостоянной) геометрической прогрессии.

2. Бесконечную в обе стороны последовательность назовём *последовательностью фибоначчиева типа*, если каждый её член равен сумме двух предыдущих. Сколько существует различных последовательностей фибоначчиева типа, в которых есть два соседних натуральных члена, не превосходящих N? (Последовательности, отличающиеся сдвигом номеров, мы различными не считаем.)

3. Дано натуральное число n. На доске выписаны все натуральные числа от $900\ldots00$ до $1200\ldots00$ (оба числа оканчиваются на n нулей). У каждого из них выбрали делитель, меньший его самого. Докажите, что хотя бы два из этих делителей совпадают.

4. Назовем число x *далеким от квадратов и кубов*, если для каждого целого числа k выполняются неравенства $|x-k^2|>10^6$ и $|x-k^3|>10^6$. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что число 2^n далеко от квадратов и кубов.

5. Натуральные числа $1,2,\ldots,100$ содержатся в объединении N геометрических прогрессий. Докажите, что $N\geqslant 31$.

6. Дано натуральное число n. В интервале (n^2,n^2+n) выбраны различные натуральные числа a и b. Докажите, что в этом интервале нет натуральных делителей числа ab, отличных от a и b.

7. Докажите, что количество решений уравнения $x^3+y^2=z^3+t^2+1$ в натуральных числах, не превосходящих 10^6, меньше, чем количество решений уравнения $x^3+y^2=z^3+t^2$ в натуральных числах, не превосходящих 10^6.

8. Дано бесконечно много наборов $(n_1,n_2,\ldots,n_{10})$ целых неотрицательных чисел. Докажите, что среди них можно найти два таких набора $(x_1,x_2,\ldots,x_{10})$ и $(y_1,y_2,\ldots,y_{10})$, что $x_i\leqslant y_i$ при всех $i\leqslant 10$.