Вступительные задачи, 10 класс

1. Найдите все наборы из $n \geqslant 2$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенствам

$$|a_1 - a_2| = 2|a_2 - a_3| = 3|a_3 - a_4| = \ldots = n|a_n - a_1|.$$

2. В бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности все числа положительны, причем каждое натуральное число встречается в ней бесконечно много раз.

3. Скандалист и n нормальных зрителей купили билеты в театр. Билеты на s мест оказались нераспроданы. Скандалист, растолкав всех, первым вошел в зал и сел на случайно выбранное им место, не поинтересовавшись номером своего места. После этого остальные зрители действовали по следующим правилам: если указанное в билете место свободно, то зритель садится на свое место; если место занято, то зритель садится на любое еще не занятое место. Какова вероятность того, что последний вошедший в зал зритель сядет не на свое место?

4. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, в котором точка H – точка пересечения высот, точки I и O – центры вписанной и описанной окружностей. Известно, что точки A, O, I, H лежат на одной окружности ω. Докажите, что окружность ω проходит через одну из вершин B и C.

5. Двое играют в игру, делая ходы по очереди: первый рисует на плоскости многоугольник, не налегающий на уже нарисованные, а второй ответным ходом раскрашивает его в один из 2008 цветов. Второй игрок хочет, чтобы любые два многоугольника, граничащие по отрезку стороны, имели разные цвета. Сможет ли первый игрок помешать ему?

6. На сторонах A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1 выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ взяты точки B_1, B_2, $\ldots$, B_n соответственно. Докажите, что круги, описанные вокруг треугольников $B_nA_1B_1$, $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3$, $\ldots$, $B_{n-1}A_nB_n$, покрывают весь многоугольник.

7. В угол с вершиной O вписаны две окружности ω_1 и ω_2. Луч с началом O пересекает ω_1 в точках A_1 и B_1, а ω_2 – в точках A_2 и B_2 так, что $OA_1 < OB_1 < OA_2 < OB_2$. Окружность γ_1 касается внутренним образом окружности ω_1 и касательных к ω_2, проведенных из A_1. Окружность γ_2 касается внутренним образом окружности ω_2 и касательных к ω_1, проведенных из B_2. Докажите, что окружности γ_1 и γ_2 равны.

8. По прямому шоссе со скоростью 60 км/ч едет машина. Недалеко от дороги стоит 100-метровый забор, параллельный дороге. Каждую секунду пассажир автомобиля измеряет угол, под которым виден забор. Докажите, что сумма всех измеренных им углов меньше 1100 градусов.

9. В блицтурнире принимали участие $2n + 3$ шахматистов. Каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Для турнира был составлен такой график, чтобы игры проводились одна за другой и чтобы каждый игрок после сыгранной партии отдыхал не менее n игр. Докажите, что один из шахматистов, игравших в первой партии, играл и в последней.

10. 100 красных точек разделили синюю окружность на 100 дуг, длины которых являются всеми натуральными числами от 1 до 100 в произвольном порядке. Докажите, что существуют две перпендикулярные хорды с красными концами.