

Серия 4, поменьше

1. Для простого числа p найдется такое целое число x , что $x^2 + x + 3$ делится на p . Докажите, что найдется целое число y , для которого $y^2 + y + 25$ делится на p .
2. Докажите, что уравнение $x^2 - 5y^2 = 19$ имеет бесконечно много решений в целых числах.
3. По кругу расставлены натуральные числа. Между каждыми двумя числами выписывают их наибольший общий делитель, а затем все старые числа стирают. Докажите, что через несколько шагов все числа станут равны.
4. В левом нижнем углу доски $2 \times n$ лежит 2^{n+1} конфет. Каждую минуту Вася находит две конфеты, лежащие в одной клетке, и перекладывает одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую конфету съедает. Докажите, что вне зависимости от порядка действий Василия рано или поздно хотя бы одна конфета окажется в правом верхнем углу.
5. Обозначим через $a_{n,k}$ количество способов распределить k конфет среди n детей таким образом, чтобы каждому ребенку досталось не более двух конфет (возможно, ни одной). Вычислите сумму $a_{2020,1} + a_{2020,4} + a_{2020,7} + \dots + a_{2020,4039}$.
6. В школе работает несколько кружков, в каждом не более 10 учеников. Известно, что у любых 11 кружков есть общий участник. Докажите, что есть ученик, который участвует во всех кружках.
7. Если человечество бессмертно, а каждый человек – смертен (и имеет конечное число детей), то найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама. Докажите.