

Серия 3, развивающая

1. Докажите, что для каждого натурального n существует бесконечно много k таких, что $k \cdot 2^n - 7$ — точный квадрат.
2. Может ли геометрическая прогрессия содержать бесконечно много членов вида а) $2^n - 1$, б) $2^n + 1$?
3. Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит квадрат натурального числа и куб натурального числа. Докажите, что она содержит шестую степень натурального числа.
4. 10 белых и 20 черных фишек расставлены по окружности. Разрешается поменять местами любые две фишки, между которыми стоят еще три фишки. Две расстановки фишек (в данных 30 точках) назовем эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько существует неэквивалентных расстановок?
5. Правительство решило приватизировать гражданскую авиацию. Каждые два из n городов страны были соединены прямой авиалинией; все эти авиалинии предполагалось передать в частные руки. Парламент, заподозрив правительство в распродаже Родины, постановил, что для каждого трех городов хотя бы две из трех авиалиний, соединяющих эти города, должны быть проданы одной и той же компании. Какое наибольшее число компаний правительству удастся привлечь к участию в приватизации?
6. На полке в беспорядке стоит 100-томная энциклопедия, один из томов которой — в красном переплете. Красный том можно поменять местами с любым другим. Какого наименьшего количества таких обменов заведомо хватит, чтобы расставить тома по порядку?
7. В некоторой стране любые два города соединены беспосадочным односторонним (в одном направлении) рейсом авиакомпании “Мягкая посадка”. При этом из любого города в любой другой можно перелететь рейсами этой авиакомпании. Докажите, что эта компания может предложить авиатур, который проходит через каждый город ровно один раз и заканчивается в том же городе, где начался.
8. Каждая клетка бесконечного клетчатого листа бумаги окрашена в один из данных n цветов ($n \geq 2$). Докажите, что найдутся четыре клетки одного цвета, центры которых являются вершинами некоторого прямоугольника со сторонами, параллельными прямым линиям на бумаге.