

Вступительные задачи

1. Вещественные числа x_1, x_2, \dots, x_n принадлежат отрезку $[-1; 1]$, причем сумма кубов этих чисел равна 0. Докажите, что сумма $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ не превосходит $n/3$.
2. На доске написаны n цифр в ряд. Докажите, что к ним можно приписать несколько цифр слева и не более n цифр справа так, чтобы получилась степень двойки.
3. В городе N . 120 линий метро, причем с любой станции можно доехать до любой другой, сделав не более 15 пересадок. Будем говорить, что две станции находятся далеко друг от друга, если для того, чтобы добраться с одной на другую, требуется не менее 5 пересадок. Какое наибольшее количество попарно далеких друг от друга станций может быть в этом городе?
4. Пусть $n \geq 2$ и a_1, a_2, \dots — все не более, чем n -значные неотрицательные целые числа, сумма цифр которых четна, а b_1, b_2, \dots — те не более чем n -значные числа, сумма цифр которых нечетна. Докажите, что $a_1^m + a_2^m + \dots = b_1^m + b_2^m + \dots$ при всех (натуральных) $m < n$. Будет ли верно утверждение задачи также и при $m \geq n$?
5. За круглым столом сидят 12 человек, а на столе стоят 28 бутылок. Если на отрезке, соединяющем двух людей, стоит бутылка, они не могут разглядеть друг друга через зеленое стекло. Докажите, что есть два человека, которые все еще могут разглядеть друг друга.
6. В марсианском языке три слова A, B и C таковы, что слово $AABB$ совпадает со словом CC . Докажите, что есть такое слово D , что каждое из слов A, B и C получается выписыванием слова D несколько раз подряд.
7. Многочлен $P(t)$ таков, что $P(\sin x) + P(\cos x) = 1$ при всех действительных x . Какова может быть степень этого многочлена?
8. Пьяный библиотекарь каждую минуту снимает с полки какой-то том Британской Энциклопедии, стоящий не на своем месте, и ставит его на свое место. Если в некоторый момент все тома окажутся на своих местах, то библиотекарь запишется в Общество Трезвости. Может ли Общество однозначно рассчитывать на пополнение своих рядов?
9. Назовем изящным разбиение натурального числа на слагаемые, каждое из которых является степенью двойки и используется не более двух раз. У каких натуральных чисел количество изящных разбиений четно? (Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за одно).
10. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон BC и AD — в точке Q . Докажите, что если каждая из трех пар биссектрис: внешних углов четырехугольника при вершинах A и C , внешних углов при вершинах B и D , а также внешних углов при вершинах Q и P (треугольников QAB и PBC соответственно) имеет точку пересечения, то эти три точки лежат на одной прямой.